ANTÔNIO TRAJANO

ARITMÉTICA PROGRESSIVA

(CURSO SUPERIOR)

Edição atualizada

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
166, Rua do Ouvidor, 166 — Rio de Janeiro

S. PAULO
292, Rua Libero Badaró

BELO HORIZONTE
Rua Rio de Janeiro, 655

ARITMÉTICA
PROGRESSIVA

Curso completo teórico e prático

DE

ARITMÉTICA SUPERIOR

Preparado para a mocidade brasileira

PELO PROFESSOR

Antônio Trajano

Autor da Aritmética Primária, da Aritmética Elementar, da Aritmética Progressiva, da Álgebra Elementar, da nova Chave da Aritmética Progressiva e da Nova Chave da Álgebra

78.ª EDIÇÃO

De acordo com o Sistema Legal de Unidades de Medida (Decreto-Lei 4.257, de 16 de Junho de 1939) e com o novo Sistema Monetário Brasileiro (Decreto-Lei 4.791, de 5 de Outubro de 1942).

LIVRARIA FRANCISCO ALVES

166, Rua do Ouvidor, 166 — Rio de Janeiro

S. PAULO — 292, Rua Libero Badaró

BELO HORIZONTE — Rua Rio de Janeiro, 655

1948

Prefácio da segunda edição

Por muitos anos, o estudo de Aritmética esteve entre nós em quasi completo abandono e deploravel atrazo. Nas escolas primárias os mestres limitavam-se a ensinar superficialmente as quatro operações fundamentais e algumas regras cuja aplicação os alunos ficavam sempre desconhecendo.

No ensino secundário acrescentavam só frações, complexos, proporções e extração de raízes, mas, como estes pontos eram expostos e demonstrados em linguagem algébrica, não podiam, de modo algum, ser compreendidos pelos discípulos.

Daquí resultava que aqueles que não seguiam depois um curso especial de matemáticas, ficavam inhabilitados para resolver os mais smples problemas e questões de Aritmética. E tão desafeiçoados êles se mostravam depois a esta ciência, que nunca mais intentavam fazer novos estudos ou ensaios para a compreender. E' por isso, que ainda hoje vemos moços e moças muito inteligentes, que falam Francês e Inglês, que sabem História, que podem discorrer sôbre Filosofia e outros ramos da literatura, mas que em Aritmética não sabem dispor os termos de uma proporção, e, muitas vezes, nem somar duas frações. É ainda pela mesma razão, que são tão raras as pessoas do povo que podem fàcilmente operar os cálculos mais triviais e comuns.

Felizmente nestes ultimos anos, o estudo de Aritmética tem começado a sair dêsse abandono em que jazeu por tanto tempo. Já se vai dando mais apreço a esta ciência importante, que é, sem contestação, um dos conhecimentos mais úteis e necessários para ambos os sexos em qualquer condição da vida.

Qual é o homem ou qual é a senhora que não precise de calcular os seus negócios? Como se poderá entrar no domínio de muitas ciências e artes sem se ter um conhecimento aperfeiçoado da ciência dos números?

O estudo de Aritmética tem duas grandes vantagens: a primeira é saber calcular, isto é, resolver fàcilmente qualquer problema de Aritmética, e a segunda é desenvolver as faculdades intelectuais por meio do raciocínio exercitado nos processos do cálculo. Esta dupla vantagem já era conhecida no tempo de Platão, pois os discípulos deste filósofo confessavam que o estudo de Aritmética desenvolvia a inteligência e encaminhava o raciocínio para a realidade.

Para o estudo de Aritmética oferecer estas duas vantagens, é necessário que o discípulo, logo que compreenda uma teoria, a ponha em prática para conhecer a sua aplicação e discipiinar o seu raciocínio nos complicados encadeamentos das operações.

Quando, porém, o estudo de Aritmética se limita a certas regras ou a certos pontos exigidos nos exames, e isto mesmo sem exercícios variados, pouco ou nenhum proveito se pode tirar dêle. Um estudo tão superficial de Aritmética deve ser banido de todos os estabelecimentos de educação por inútil e prejudicial; *pois ilude o estudante fazendo-o crer que sabe a ciência dos números, quando muitas vezes não pode resolver o mais simples problema.*

O nosso compêndio de **Aritmética Progressiva** apresenta a parte teórica de cada ponto acompanhada de exercícios e problemas graduados para o ensino da aplicação, e dêste modo os alunos poderão exercitar-se com grande vantagem na teória e na prática, podendo depois resolver com destreza qualquer questão de Aritmética.

Aqueles, pois, que cursarem o nosso compêndio, gozarão das duas vantagens que oferece o estudo da ciência dos números.

O Autor.

Cada exemplar desta Aritmética terá a chancela do autor.

Antonio Trajano.

Aritmética Progressiva

CURSO SUPERIOR

NUMERAÇÃO

1. Aritmética é a ciência elementar dos números e a arte de calcular por meio de algarismos.

E' ciência, porque trata da teoria e propriedades dos números; é arte, porque dá as regras para calcular.

Como na Aritmética se representam os números e operam os cálculos por meio de algarismos, devemos começar por estes o estudo desta disciplina.

Algarismos

2. Algarismos são sinais numéricos e letras que abreviadamente representam os números.

Há duas espécies de algarismos que se denominam: algarismos arábicos e algarismos romanos.

3. Algarismos arábicos são os dez sinais seguintes chamados:

1,	**2,**	**3,**	**4,**	**5,**	**6,**	**7,**	**8,**	**9,**	**0.**
um,	dois,	tres,	quatro,	cinco,	seis,	sete,	oito,	nove,	cifra.

Os primeiros nove chamam-se **algarismos significativos**, porque, por si só, representam um número de unidades. A cifra, apesar de não representar valor algum, é indispensável na numeração, porque ocupa os lugares onde não há valor para exprimir, e dá-se-lhe também o nome de **zero** que quer dizer nada.

Estes algarismos chamam-se **arábicos**, porque foram os árabes que os introduziram na Europa.

Nota. Antigamente dava-se a estes algarismos o nome de **digitos**, palavra que vem do latim *digitus*, e que significa dedo. Foi com os dedos das mãos que o homem começou a exercitar-se nas operações do cálculo; mais tarde, quando esses processos, já sistematizados, passaram dos dedos pará os sinais escritos, chamados algarismos, estes receberam tambem o nome de digitos.

4. Os algarismos romanos são sete letras maiúsculas do nosso alfabeto, tendo cada uma delas um valor convencionado. As sete letras e seus valores são:

I,	V,	X,	L,	C,	D,	M.
um,	cinco,	dez,	cincoenta,	cem,	quinhentos,	mil.

5. Repetindo e alterando estas sete letras, podemos exprimir todos os outros números, observando as cinco regras seguintes:

1ª As letras **I, X, C** e **M** repetem-se até três vezes; assim **II** representam dois, **XXX** representam trinta, **CCC** representam trezentos, **MM** representam dois mil, etc.

2ª Se uma letra de valor menor estiver depois de outra de valor maior, somam-se ambas; assim **VI** exprimem seis, **LX** exprimem sessenta, **CX** exprimem cento e dez, etc.

3ª Se uma letra de valor menor estiver antes de outra de valor maior, subtrai-se a letra menor da maior; assim **IV** exprimem quatro, **XL** exprimem quarenta, **XC** exprimem noventa, etc.

4ª Se uma letra de valor menor estiver entre duas letras de valores maiores, será subtraida da que lhe fica adiante, sem sofrer alteração alguma a que lhe fica atrás; assim **XIV** exprimem quatorze, **XIX** exprimem dezenove, **MCM** exprimem mil e novecentos, etc.

5ª um risco horizontal sobre uma ou mais letras multiplica por mil o seu valor; assim $\overline{\text{IV}}$ exprimem quatro mil, $\overline{\text{V}}$ exprime cinco mil, $\overline{\text{XII}}$ exprimem doze mil, $\overline{\text{CD}}$ exprimem quatrocentos mil, etc. As letras unidas pelo traço horizontal não alteram o valor das que não teem traço; assim $\overline{\text{VI}}$ **VI** exprimem seis mil e seis.

6. Estes algarismos chamam-se romanos, porque foram usados pelos antigos romanos em sua numeração; entre nós, porém, só são empregados para numerar capítulos e outras divisões dos livros; para marcar as horas nos mostradores dos

relógios; para indicar a ordem dos nomes dos soberanos, como: capítulo IV, Pedro II, Afonso VI, etc.

7. A série natural dos números inteiros escreve-se do seguinte modo, com as duas espécies de algarismos:

Um	1	I	Sessenta	60	LX
Dois	2	II	Setenta	70	LXX
Três	3	III	Oitenta	80	LXXX
Quatro	4	IV	Noventa	90	XC
Cinco	5	V	Cem	100	C
Seis	6	VI	Duzentos	200	CC
Sete	7	VII	Trezentos ...	300	CCC
Oito	8	VIII	Quatrocentos.	400	CD
Nove	9	IX	Quinhentos ..	500	D
Dez	10	X	Seiscentos ...	600	DC
Onze	11	XI	Setecentos ...	700	DCC
Doze	12	XII	Oitocentos ...	800	DCCC
Treze	13	XIII	Novecentos ..	900	CM
Quatorze	14	XIV	Mil	1000	M
Quinze	15	XV	Dois mil	2000	MM
Desesseis	16	XVI	Três mil	3000	MMM
Dezessete	17	XVII	Quatro mil ..	4000	$\overline{IV}$
Dezoito	18	XVIII	Cinco mil ...	5000	$\overline{V}$
Dezenove	19	XIX	Seis mil ...	6000	$\overline{VI}$
Vinte	20	XX	Sete mil	7000	$\overline{VII}$
Trinta	30	XXX	Oito mil	8000	$\overline{VIII}$
Quarenta	40	XL	Nove mil	9000	$\overline{IX}$
Cincoenta	50	L	Dez mil	10000	$\overline{X}$

8. Na formação dos números romanos, escrevem-se primeiro os milhares, depois, em ordem, as centenas, as dezenas e unidades, como se vê na seguinte tabela:

Milhares	Centenas	Dezenas	Unidades
M	C	X	I
MM	CC	XX	II
MMM	CCC	XXX	III
$\overline{IV}$	CD	XL	IV
$\overline{V}$	D	L	V
$\overline{VI}$	DC	LX	VI
$\overline{VII}$	DCC	LXX	VII
$\overline{VIII}$	DCCC	LXXX	VIII
$\overline{IX}$	CM	XC	IX

Do que ficou exposto, vemos que de três modos diferentes podemos representar os números, a saber:

1° Com palavras escritas, como — **trinta e nove** —.
2° Com algarismos romanos como — **XXXIX** —.
3° Com algarismos arábicos como — **39** —.

Nas operações da Aritmética, empregam-se somente os algarismos arábicos por serem muito mais fáceis de escrever, e sobretudo, por exprimirem os números de um modo muito abreviado, inteligível e não sujeito a erros.

Definições

Como vamos agora fazer operações sôbre unidades, números e quantidades, precisamos saber o que significam estes termos em Aritmética.

9. Unidade quer dizer uma só cousa ou uma grandeza por onde se começam a contar ou medir as quantidades: assim em 25 livros, a unidade é um livro; em 18 moedas, a unidale é uma moeda: em 8 meninos, a unidade é um menino; em 20 metros de morim, a unidade é um metro, etc.

10. As unidades podem ser simples ou coletivas. As **unidades simples** representam uma só cousa que não pode ser dividida em partes inteiras; e a **unidade coletiva** representa um grupo de unidades simples, como uma *dúzia*, que significa doze unidades simples; um *cento* que significa cem unidades simples; uma *grosa*, que significa doze dúzias ou cento e quarenta e quatro unidades simples, etc.

Ilustração. Cinco dúzias de ovos são sessenta ovos; ora, se dissermos cinco dúzias de ovos, empregamos unidades coletivas, e se dissermos sessenta ovos, empregamos unidades simples.

Quando tratarmos de numeração, falaremos mais extensamente sôbre a formação das diversas unidades coletivas.

11. Quantidade é uma porção de alguma cousa que se pode pesar, medir ou contar. Uma quantidade de café pode ser pesada; uma quantidade de vinho pode ser medida com o litro; uma quantidade de pano pode ser medida com o metro, e uma quantidade de laranjas pode ser contada. As quantidades são ou homogêneas ou heterogêneas.

Quantidades homogêneas são as da mesma espécie de cousas, e que se podem reunir em um só número, como 8 livros, 12 livros e 10 livros, que fazem o número de 30 livros.

Quantidades heterogêneas são as de espécies diferentes, e que não se podem reunir em um só número, como 8 livros, 12 chapéus e 7 casas.

Ilustração. Se sôbre uma mesa estiverem duas pilhas de pratos, aquelas duas quantidades serão homógêneas. Se em lugar de pratos, estiverem dois montes de pêssegos, as quantidades serão tambem homogêneas; mas, se sôbre a mesa, estiverem uma pilha de pratos e um monte de pêssegos, estas duas quantidades serão heterogêneas.

12. As quantidades dividem-se ainda em contínuas e descontinuas.

Quantidades contínuas são aquelas, cujas unidades estão intimamente ligadas em um só todo, e somente podem ser avaliadas pelo pêso ou pela medida. Assim uma barra de ferro, uma peça de pano, um tonel de vinho, a extensão de uma estrada são quantidades contínuas.

Quantidades descontínuas são as que constam de um agregado de pessoas ou cousas, distintamente separadas, sendo cada uma delas uma unidade. Assim uma porção de laranjas, de chapéus, de meninos, de moedas são quantidades descontínuas.

Nota. A unidade tanto pode ser arbitrária nas quantidades contínuas como nas descontínuas. Nas quantidades contínuas, medindo, por exemplo, o comprimento de uma corda, podemos usar como unidade o metro, a jarda, a braça, o côvado, o pé, o palmo, a polegada ou qualquer vara com que quisermos fazer a medição. Nas quantidades descontínuas ainda que haja a unidade natural, que é um objeto ou uma cousa, podemos também tomar uma unidade arbitrária; assim, avaliando uma grande porção de laranjas, podemos contá-las uma a uma, que é a unidade natural, e podemos também contá-las às dúzias, aos centos, aos cestos e aos sacos. Enche-se de laranjas um cesto ou um saco, e está aí uma unidade para avaliar uma grande quantidade de laranjas.

13. Número é o que exprime quantas unidades contém uma quantidade. Em 38 barricas de farinha, a quantidade é toda aquela farinha; a unidade é uma barrica, e o número das unidades ou barricas é 38.

A série dos números inteiros é ilimitada, porque por mais elevado que seja o número que concebermos, poderemos juntar-lhe uma unidade, e formar outro número maior.

14. Os números dividem-se em pares e impares, abstratos e concretos, primos e múltiplos, simples e compostos, decimais e complexos.

Números pares são os que terminam em 2, 4, 6, 8 ou 0.

Números impares são os que terminam em 1, 3, 5 7 ou 9.

Números abstratos são os que não estão unidos a nome algum, como 5, 20, 35, etc.

Números concretos são os que estão unidos ao nome dos objetos, como 5 livros, 20 penas, 35 casas, etc.

Nota. Quando empregamos o termo *número*, quer seja só, quer acompanhado por um qualificativo, mas sem substantivo algum, como *número par*, *número primo*, *número múltiplo*, etc., deve ser tomado no sentido abstrato.

15. Nas operações da Aritmética, quando um número consta de um só algarismo, como 1, 2, 3, 4, etc., chama-se **número simples**; quando consta de mais de um algarismo, como 12, 229, 2500 etc., chama-se **número composto.**

16. Números consecutivos são os que em uma série qualquer, cada um dêles difere do seu imediato em uma só unidade ou 1, como 7, 8, 9, 10, 11, 12, etc.

As outras espécies de números serão definidas e explicadas nos seus respectivos lugares.

Numeração decimal

17. Numeração é a parte da Aritmética, que ensina o nome de todos os números, e estabelece as regras de escrevê-los abreviadamente por meio de algarismos, e por isso se divide em numeração falada e numeração escrita.

18. A **numeração falada** ensina a nomenclatura dos números, isto é, expõe o modo de exprimir todos os números com uma quantidade muito limitada de palavras.

Ha uma infinidade de números, e se déssemos a cada um dêles um nome diferente, teríamos de guardar na memória milhões de nomes, o que seria muito difícil e até impossível. Para remediar êsse inconveniente, inventou-se um meio fácil de dar um nome distinto a cada número, dispondo e combinando só as seguintes palavras:

Um	**dez**	**cem**	**mil**	milhão
Dois	vinte	duzentos	.	bilião
Três	trinta	trezentos	.	trilião
Quatro	quarenta	quatrocentos	.	quatrilião
Cinco	cincoenta	quinhentos	.	quintilião
Seis	sessenta	seiscentos	.	sextilião
Sete	setenta	setecentos	.	septilião
Oito	oitenta	oitocentos	.	oitilião
Nove	noventa	novecentos	.	nonilião

Destas trinta e sete palavras, doze são primitivas a saber: **um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, cem e mil;** as outras se formam destas pelo acréscimo de uma das terminações **enta, entos, lhão** ou **lião.** De sorte que, com doze palavras primitivas e mais vinte e cinco derivadas destas, podemos exprimir com a maior clareza, na nossa língua, o nome de todos os números imagináveis.

Nota. Desde o número onze até o número quinze, a linguagem da numeração não segue à ordem regular das outras dezenas; pois em lugar de se dizer dez e um, dez e dois, dez e três, dez e quatro, dez e cinco, o uso introduziu onze, doze, treze, quatorze, e quinze.

19. O nome de um número, qualquer que êle seja, ou há de ser uma das 37 palavras referidas, ou há de ser composto de duas ou mais destas palavras. O pequeno vocabulário da numeração está tão engenhosamente organizado que de nenhum outro termo precisa para exprimir toda a imensidade de números. Se tomarmos, por exemplo, as palavras **três, trinta, trezentos** e **mil,** poderemos formar com ela o nome de grande quantidade de números, como

Trinta e três	33	Três mil	3000
Trezentos e três	303	Três mil e três	3003
Trezentos e trinta	330	Três mil e trinta	3030
Trezentos e trinta e três	333	Três mil e trinta e três	3033
Mil e três	1003	Três mil e trezentos	3300
Mil, trezentos e trinta e três	1333	Três mil, trezentos e três ...	3303
Mil, trezentos e trinta	1330	Três mil, trezentos e trinta ..	3330
Mil, trezentos e três	1303	Três mil, trezentos e trinta e três	3333
Mil e trezentos	1300	Trinta mil, etc.	30000
Mil e trinta e três	1033		
Mil e trinta	1030		

Como vemos no exemplo acima, com a disposição variadr de quatro palavras, formamos grande número de nomes diversos, e poderíamos formar ainda mais, juntando a todos êsses números a palavra *trezentos mil*. E dêste modo, com um pequeno vocabulário, podemos dar um nome distinto a cada nú-

mero, como havemos de ver no seguimento do estudo da numeração.

20. A numeração escrita ensina a escrever todos os números com os algarismos arábicos.

Se tivéssemos de escrever os números como os falamos, seria muito difícil fazer as operações da Aritmética. Assim, para escrevermos o número *setenta e seis mil duzentos e oitenta e quatro,* teríamos de empregar trinta e oito letras; ao passo que com cinco algarismos o exprimimos com toda a clareza, escrevendo 76284. Comecemos, pois, o estudo dêste ponto importante pela formação das diversas unidades.

Formação das diversas unidades

21. No sistema de numeração decimal, uma só cousa chama-se uma **unidade** simples; dez cousas chamam-se dez unidades simples, mas formam unidade coletiva chamada **dezena;** cem cousas chamam-se cem unidades simples, mas formam outra unidade coletiva chamada **centena.** De sorte que as diversas unidades coletivas são formadas do seguinte modo:

dez unidades simples formam uma dezena;
dez dezenas formam uma centena;
dez centenas formam um milhar;
dez milhares formam uma dezena de milhares;
dez dezenas de milhares formam uma centena de milhares;
dez centenas de milhares formam um milhão;
dez milhões formam uma dezena de milhões;
dez dezenas de milhões formam uma centena de milhões;
dez centenas de milhões formam um bilião, e assim por diante.

Este sistema de numeração chama-se **decimal,** porque a base da formação das diversas unidades é sempre **dez.** Em nenhum outro sistema poderemos calcular mais fàcilmente do que neste, por isso todas as nações civilizadas o adotaram, para as diversas operações da Aritmética.

Nota. Ha outros sistemas de numeração, como o **binário** em que duas unidades iguais formam outra unidade imediatamente superior; o **ternário** em que três unidades iguais formam outra unidade imediatamente superior; o **quaternário** em que quatro unidades iguais formam outra, imediatamente superior; finalmente o **quinário,** o **senário,** etc. No sistema binário a base é dois; no ternário, é três; no quaternário, é quatro, e assim por diante.

A base não só mostra o número de unidades iguais que formam uma unidade superior, mas indica também o número de algarismos que tem

cada sistema de numeração; assim o binário tem dois algarismos que são 1 e 0; o ternário tem três que são 1, 2 e 0; o quaternário tem quatro que são 1, 2, 3 e 0; o quinário tem cinco que são 1, 2, 3, 4 e 0; finalmente o decimal tem dez algarismos que são, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0.

Os antigos adotaram o número dez como base da numeração quasi que guiados pela natureza, porque contando êles pelos dedos das mãos para resolver os seus problemas, quando chegavam ao número dez, total dos dedos de ambas as mãos, encontravam aí um termo de onde tinham de voltar para começar nova contagem.

22. Ordem das diversas unidades. Na numeração, as diversas unidades seguem uma ordem regular começando da direita para a esquerda. As unidades simples ocupam a primeira ordem, as dezenas a segunda, as centenas a terceira, os milhares a quarta, e assim tomando a ordem imediata, as que forem dez vezes maiores, por isso as diversas unidades teem também as seguintes denominações:

as unidades simples	são	*unidades da 1ª ordem;*
as dezenas	»	*unidades da 2ª ordem;*
as centenas	»	*unidades da 3ª ordem;*
os milhares	»	*unidades da 4ª ordem;*
as dezenas de milhares	»	*unidades da 5ª ordem;*
as centenas de milhares	»	*unidades da 6ª ordem;*
os milhões	»	*unidades da 7ª ordem;*
as dezenas de milhões	»	*unidades da 8ª ordem;*
as centenas de milhões	»	*unidades da 9ª ordem;*
os biliões	»	*unidades da 10ª ordem;*

e assim por diante, como se vê na seguinte tabela:

13ª	12ª	11ª	10ª	9ª	8ª	7ª	6ª	5ª	4ª	3ª	2ª	1ª
Triliões	centenas de biliões...	dezenas de biliões....	Biliões	centenas de milhões.	dezenas de milhões ..	Milhões	centenas de milhares	dezenas de milhares.	Milhares	centenas	dezenas	Unidades ....
3	2	4	9	9	8	7	6	5	4	3	2	5

23. No sistema decimal há as três leis seguintes que regem toda a numeração:

1ª Dez unidades de uma ordem formam uma unidade imediatamente superior.

2ª Um algarismo passando de qualquer ordem para a imediata à esquerda, o seu valor fica 10 vezes maior.

3ª Quando em uma ordem não há quantidade para ser representala por algum algarismo significativo, o seu lugar será ocupado por uma cifra, porque esta conserva a ordem sem lhe dar valor algum na numeração.

24. Resulta destas três leis que cada algarismo significativo não pode deixar de ter dois valores: um absoluto ou fixo, e o outro relativo ou variável.

Valor **absoluto** é o que tem o algarismo quando isolado; valor **relativo** é o que êle toma conforme a ordem que ocupa em um número.

Ilustração. Se escrevermos o algarismo 3 na ordem das unidades simples, êle representará 3 cousas, que é o seu valor absoluto; se o escrevermos na ordem das dezenas, representará 30 cousas; se o escrevermos na ordem das centenas, representará 300 cousas; se o escrevermos na ordem dos milhares, representará 3000 cousas, e assim êle irá se tornando 10 vezes maior em cada ordem que ocupar à esquerda; e todos êsses valores são relativos porque teem relação com a ordem que o algarismo ocupa. Quando um algarismo está só, tem sempre o valor absoluto, porque representa unidades simples.

Milhares	Centenas	Dezenas	Unidades
			3
		3	0
	3	0	0
3	0	0	0

25. Se quisermos exprimir com algarismos o número quatrocentos e quatro, escreveremos 4 para representar as centenas ou os centos, depois uma cifra para ocupar a ordem vaga das dezenas, e 4 para representar as unidades simples, e teremos 404. Se omitíssemos a cifra, o número exprimiria 44 e não 404.

A cifra desempenha, portanto, uma função muito importante e necessária na numeração, embora não represente valor algum quando isolada.

Para escrever os números com algarismos, temos a seguinte

Regra: *Escreve-se o número, da esquerda para a direita, exprimindo primeiro as unidades maiores e a seguir as menores, pondo-se cifras nas ordens que não tiverem valores.*

Leitura dos números

26. Para ler um número dividimo-lo em grupos de três algarismos, começando pela direita, tendo cada grupo só três ordens de unidades. Estes grupos teem na numeração o nome de

classes. A primeira classe é a que fica à direita; a última classe, que fica à esquerda, pode ter um, dois ou três algarismos, conforme as ordens de unidades que contiver, como vemos no modêlo seguinte:

de Quatriliões			de Triliões			de Biliões			de Milhões			de Milhares			de Unidades		
....	....	Unidades	Centenas	Dezenas	Unidades	Centenas	Dezenas	Unidades	Centenas	Dezenas	Unidades	Centenas	Dezenas	Unidades	Centenas	Dezenas	Unidades
.	.	6	,1	9	2	,7	3	7	,4	5	8	,3	2	8	,1	9	8
(Ultima classe)			(5ª)			(4ª)			(3ª)			(2ª)			(1ª classe)		

Neste modêlo vemos o número 6 192 737 458 328 198 dividido em seis classes, tendo cada classe três ordens de unidades. A 1.ª classe contém unidades, dezenas e centenas de **unidades simples**, a 2.ª classe contém unidades, dezenas e centenas de **milhares**; a 3.ª tem unidades, dezenas e centenas de **milhões**; a 4.ª unidades, dezenas e centenas de **biliões**; a 5.ª unidades, devenas e centenas de **triliões**; e a 6.ª, que é a última, tem sòmente unidades de **quatriliões**.

27. As outras classes que ainda podem ser formadas em números maiores, teem as seguintes denominações:

Sétima classe, **Quintiliões.**
Oitava classe, **Sextiliões.**
Nona classe, **Septiliões.**
Décima classe, **Oitiliões.**
Undécima classe, **Noniliões.**
Duodécima classe, **Deciliões.**

Problema. Como se lê o número 2 7 9 3 8 4 5 6 8 7 5 2 1 4?

Solução. Dividido o número dado em classes de três algarismos, achamos que êle tem cinco classes: e como a primeira classe é das unidades, a segunda dos milhares, a terceira dos milhões, a quarta dos biliões e a quinta dos triliões, segue-se que o número contém **27 triliões, 938 biliões, 456 milhões, 875 milhares e 214 unidades.**

Triliões	Biliões	Milhões	Milhares	Unidades
27,	938,	456,	875,	214,

Regra para ler um número. *Dividem-se todos os seus algarismos em classes de três algarismos, começando pela direita; dá-se a cada classe a sua denominação na seguinte ordem: uni-*

dades, milhares, milhões, biliões, etc., e depois, começando pela esquerda, enuncia-se o número de cada classe com sua respectiva denominação.

Nota. Não damos aquí os números para o exercício de aplicação porque o professor deve apresentar os números que forem adequados ao adiantamento e capacidade dos seus discípulos.

Numeração das quantias

28. A palavra quantia significa qualquer quantidade de dinheiro.

29. No Brasil, as importâncias em dinheiro são expressas por duas unidades: o **cruzeiro** e o **centavo**, sendo que o cruzeiro tem 100 centavos.

Estas moedas foram criadas pelo Decreto-Lei de 5 de Outubro de 1942.

30. O dinheiro em circulação, pelo sistema em vigor, é constituido por moedas metálicas e cédulas de papel (notas).

As moedas são fundidas em bronze de alumínio ou em cupro-niquel. As de bronze de alumínio são 1, 2 e 5 cruzeiros. As de cupro-niquel teem os valores de 10, 20 e 50 centavos. As cédulas teem os valores de 10, 20, 50, 100, 200, 500 e 1000 cruzeiros.

Observação. — À página 124 dêste livro daremos a leitura e escrita das quantias no sistema atual, isto é, expressas em cruzeiros e centavos, assim como as operações sobre as mesmas.

31. Antes da instituição do cruzeiro havia três unidades principais, que damos a seguir, pois a elas se referem moedas que ainda estão circulando:

Unidade inferior	Um real
Unidade média	Mil réis
Unidade superior	Conto de réis

Além disso, a quantia de 20 réis era chamada *vintém* e a de 100 réis, *tostão*. O mil réis correspondia portanto, a dez tostões.

Para se indicar uma quantia nessas unidades escreve-se um cifrão ($) entre as centenas e o milhares; assim

Um mil réis escreve-se	1$000
4 *mil* e 500 *réis* escreve-se	4$500

Si quisermos *um real,* escreveremos

Um real $001

Do mesmo modo,

40 réis $040
125 réis $125

Neste sistema, o milhão de réis tem o nome de *conto de réis;* entre o algarismo das centenas de milhar e o das unidades de milhão, colocam-se dos pontos; assim

8 contos de réis escreve-se .... 8:000$000
35 contos e 840 mil réis .... 35:840$000
7 contos, 425 mil e 600 réis ...... 7:425$600

Quando se tratar de um número inteiro de mil réis, de modo que os três últimos algarismos são zeros, estes podem ser suprimidos; exemplo: 28:231$.

31. O modo de escrever as quantias desde um real até milhão de contos é o seguinte:

Um real $001
Dez réis $010
Cem réis $100
Mil-réis .... 1$000
Dez mil réis .... 10$000
Cem mil réis .... 100$000
Um conto .... 1:000$000
Dez contos .... 10:000$000
Cem contos .... 100:000$000
Mil contos .... 1.000:000$000
Dez mil contos .... 10.000:000$000
Cem mil contos .... 100.000:000$000
Milhão de contos ...... 1.000.000:000$000

Nota. II — Usaram-se antigamente as seguintes unidades monetárias: Cruzado, que valia 400 réis (hoje 40 centavos); Pataca, que valia 320 réis (hoje 32 centavos); Meia pataca, que valia 160 réis (hoje 16 centavos).

SINAIS ARITMÉTICOS

33. Sinais aritméticos são figuras usadas na Aritmética para se indicar, de um modo abreviado, as diversas operações, e mostrar a relação que há entre certas quantidades.

Os sinais usados na Aritmética são os seguintes:

O sinal de somar é ...... + que se lê: *mais.*
O sinal de diminuir é ... — que se lê: *menos.*
O sinal de multiplicar é . × que se lê: *multiplicado por.*
O sinal de dividir é ..... ÷ que se lê: *dividido por.*
O sinal de igualdade é .. = que se lê: *igual a.*
O sinal de interrogação é. =? que se lê: *igual a quanto?*

Nota. Os sinais + e — foram introduzidos pelo matemático alemão Miguel Steifel, em uma obra que publicou em 1544.

O sinal × foi introduzido por Guilherme Ougtred, sábio inglês que nasceu em 1573.

O sinal ÷ foi introduzido pelo Dr. João Pell, analista inglês que floresceu ne século XVI.

34. Além dêstes sinais, há ainda os seguintes que foram introduzidos na Aritmética em diversas épocas:

O sinal de razão .... : que se lê: *está para.*
O sinal de proporção .... :: que se lê: *assim como.*
O sinal de dedução ..... ∴ que se lê: *portanto.*
O sinal de desigualdade . > que se lê: *maior do que.*
O sinal de desigualdade . < que se lê: *menor do que.*
O sinal de raiz quadrada $\sqrt{\ }$ que se lê: *raiz quadrada.*
O sinal de raiz cúbica ... $\sqrt[3]{\ }$ que se lê: *raiz cúbica.*
O sinal de agregação .... ( ) que se chama *parêntesis.*

Os sinais + — × ÷ $\sqrt{\ }$ são símbolos de operação, porque indicam o processo que se tem de efetuar.

Os sinais = > < : :: ∴ ( ) são símbolos de relação, porque mostram a conexão que há entre as quantidades.

Nota. Daremos uma explicação completa de cada sinal, quando o empregarmos no cálculo.

OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

35. As operações fundamentais da Aritmética são quatro, que se denominam **Somar, Subtrair, Multiplicar** e **Dividir.** Chamam-se fundamentais, porque servem de base para fazer todas as outras operações aritméticas.

Estas quatro operações teem por fim:

1° Dados dois ou mais números, achar a sua soma.
2° Dados dois números desiguais, achar a sua diferença.
3° Dados dois fatores, achar o seu produto.
4° Dados dois números desiguais, achar quantas vezes o menor está contido no maior.

Observação. A potenciação e a radiciação não são dois processos aritméticos diferentes ou distintos das quatro operações fundamentais. A potenciação é uma simples multiplicação, e a radiciação é um processo onde entram a divisão e a subtração; portanto, em lugar de elevarmos a seis o número das operações fundamentais, como querem alguns autores, poderiamos reduzi-las sòmente a duas, porque, sendo a multiplicação uma adição abreviada, e a divisão uma subtração também abreviada, segue-se que cada mudança que se faça nos números, deve só aumentar ou diminuir o seu valor; por isso, restritamente falando, há só duas operações fundamentais que são **agregação** e **desagregação** dos números. E' porém, muito conveniente conservarmos a multiplicação e a divisão no número das operações fundamentais, porque elas juntam e separam os números por um processo muito diferente do da adição e da subtração.

Cada uma das operações fundamentais será definida, analisada e exemplificada no seu lugar respetivo.

36. Como vamos agora usar constantemente das palavras *problema, teorema, solução, regra, demonstração, prova* e *cálculo*, precisamos saber o que significam estes termos em Aritmética.

As diversas questões da Aritmética podem ser expressas ou em um problema ou em um teorema.

37. Problema é uma questão que requer uma ou mais quantidades desconhecidas que se teem de obter por meio de quantidades conhecidas.

As quantidades conhecidas chamam-se **dados** do problema; as quantidades desconhecidas chamam-se **incógnitas,** e o processo por meio do qual se acham as quantidades desconhecidas chama-se **solução.**

38. Teorema, em Aritmética, é um principio que enuncia uma propriedade dos números ou qualquer verdade relativa ao processo dos cálculos, e que se pode tornar evidente por meio de um raciocinio chamado demonstração.

Em um teorema temos de distinguir dois pontos que são a hipotese e a tese. **Hipótese** é a suposição que se faz, para tirar uma conclusão; **tese** é a conclusão tirada da hipótese.

Ilustração. Estes dois pontos ficarão evidentes no seguinte teorema: *Se o dividendo e o divisor forem multiplicados pelo mesmo número, o quociente não sofrerá alteração.* Este teorema enuncia uma verdade relativa ao processo da divisão; a hipótese ou suposição é: *Se o dividendo e o divisor forem multiplicados pelo mesmo número;* e a tese ou conclusão é: *o quociente não sofrerá alteração.*

Demonstração é um raciocínio desenvolvido para provar que um teorema, uma regra ou qualquer outro enunciado da Aritmética é verdadeiro.

Regra é a direção geral para resolver todos os problemas que pertencem a uma espécie determinada.

Prova é uma segunda operação para verificar a exatidão da primeira.

39. Cálculo é uma operação feita pelo raciocínio com o auxílio dos algarismos, para se obter a resposta de um problema ou achar o resultado de alguma investigação aritmética. Este termo tem também outras acepções na Matemática.

Ilustração. A palavra cálculo vem do latim *calculus*, que significa uma pedrinha. Os antigos romanos, em suas contagens pelos dedos, todas as vezes que chegavam ao número 10, número dos dedos das duas mãos, punham de parte uma pedrinha que chamavam *calculus;* no fim da contagem, somavam tantas vezes o número 10 quantas pedrinhas tinham separado. Daquí veio o nome de cálculo dado às operações aritméticas.

40. Lei, em Aritmética, é tudo o que é constante na variedade.

Ilustração. Nas operações, os números passam por variações e formas diferentes, mas obedecendo sempre à seguinte lei, que é inalteravel: *Dez unidades iguais formam a unidade imediatamente superior.*

Em uma proporção, todos os seus termos podem variar de lugar e de valor, mas observando sempre a seguinte lei: *O produto dos extremos é igual ao produto dos meios.*

Nota. Para simplificar e tornar mais metódico e inteligível a nossa exposição, vamos tratar agora sòmente das quatro operações fundamentais dos **números inteiros**, e depois trataremos particularmente dos números mistos e frações.

SOMAR

41. Somar é reunir o valor de dois ou mais números em um número só.

Os números que se somam, chamam-se **parcelas** ou **adições**, e o resultado da operação chama-se **soma.**

O sinal de somar é + que se lê: *mais*. Este sinal, escrito entre dois números, mostra que êles devem ser somados, como 2 + 3 que se lê: *2 mais 3*.

O sinal de igualdade é = que se lê: *igual a*. Este sinal, escrito entre duas quantidades, mostra que êles são iguais, como 2 + 3 = 5 que se lê: *2 mais 3 igual a 5*, ou *2 mais 3 são 5*.

42. Na operação de somar temos de observar os quatro princípios seguintes:

1° Todas as parcelas de uma soma devem ser quantidades homogêneas, isto é, cousas da mesma espécie.

2. A ordem em que escrevemos as parcelas não altera o valor da soma.

3° A soma é da mesma espécie que as parcelas, e deve conter o total dos valores que elas representam.

4° Na adição das parcelas só unidades da mesma ordem podem ser reunidas ou somadas.

Estes quatro princípios ficarão claramente demonstrados e evidentes no primeiro problema que resolvermos.

43. Na operação de somar há dois casos para distinguir:

1° Quando a soma de uma coluna não exceda a 9.
2° Quando a soma de uma coluna excede a 9.

Primeiro caso. Quando a soma de uma coluna não excede a 9, escreve-se a soma debaixo dessa coluna.

Problema. Em um cesto estavam 232 laranjas, em outro 343 e em outro 122; reunidas todas essas laranjas em um só monte, qual ficou o seu número?

Solução. Escrevemos as três parcelas umas debaixo das outras, de sorte que as unidades da mesma ordem fiquem em coluna. Debaixo da última parcela faremos um traço, e passaremos a somar a coluna das unidades. Então diremos: 2 e 3 são 5, e 2 são 7, que escrevemos debaixo das unidades. Passando às dezenas, diremos 3 e 4 são 7, e 2 são 9 que escrevemos debaixo das dezenas. Passando às centenas, concluiremos: 2 e 3 são 5, e 1 são 6 que escrevemos debaixo das centenas. O número das laranjas reunidas é 697.

$$\begin{array}{rl} 232 & \text{laranjas} \\ 343 & \text{laranjas} \\ 122 & \text{laranjas} \\ \hline 697 & \text{laranjas} \end{array}$$

Demonstração. Os quatro princípios da operação de somar ficam claramente evidentes na solução dêste problema.

1.° Todas as parcelas desta adição são homogêneas, porque todas são quantidades de laranjas; se as parcelas fossem de espécies diferentes,

a soma não se poderia referir a nenhuma delas, porque 2 laranjas e 3 queijos não são, nem 5 laranjas, nem 5 queijos, mas 2 laranjas e 3 laranjas são 5 laranjas.

2.º Mudando a ordem das parcelas, começando a somar de baixo para cima ou por outra qualquer parcela o resultado será o mesmo, pois teremos sempre 697 laranjas. Este princípio é intuitivo, porque se guardarmos em um cofre primeiramente 2 moedas depois 3 e depois 4, o resultado será o mesmo que se pusermos primeiro 4 moedas, depois 3 e depois 2; em ambos os casos, o cofre conterá 9 moedas.

3.º A soma é da mesma espécie que as unidades, porque é um total de laranjas que encerra todas as unidades contidas nas diversas parcelas.

4. Como os três números de laranjas conteem unidades, dezenas e centenas, e como cada uma destas espécies de unidades forma uma coluna separada, segue-se que, somando os vários algarismos de cada coluna, reuniamos sòmente unidades da mesma espécie.

44. Segundo caso. Quando a soma de uma coluna excede a 9, formam-se unidades superiores para se juntar à coluna seguinte.

Problema. Qual é a soma de 337, 440, 96 e 208 ?

Solução. A soma da coluna das unidades é 21; ora 21 unidades conteem 2 dezenas e 1 unidade; escrevemos 1 debaixo das unidades e levaremos as 2 dezenas para a coluna das dezenas, que com elas, soma 18 dezenas que conteem 1 centena e 8 dezenas; escrevemos 8 debaixo das dezenas, e levaremos a centena para a coluna das centenas, que com ela soma 10; ora 10 centenas conteem 1 milhar exato, e como não ha centena nenhuma, escreveremos uma cifra debaixo das centenas, e levaremos o milhar para a casa seguinte. A soma das quatro parcelas é 1081.

Milhares	Centenas	Dezenas	Unidades
.	3	3	7
.	4	4	0
.		9	6
.	2	0	8
1	0	8	1

Para operar uma adição de duas ou mais parcelas, temos a seguinte

Regra. *Escrevem-se as diversas parcelas, de sorte que as unidades da mesma ordem ou denominação fiquem umas debaixo das outras em coluna.*

Começa-se a adição pela coluna das unidades, e se a soma de uma coluna não exceder a 9, escreve-se a soma debaixo dessa coluna, mas se exceder a 9, escrevem-se debaixo dessa coluna as unidades que não formarem uma unidade imediatamente superior, e as unidades formadas vão para a coluna seguinte, e na última colúna escreve-se a soma completa dessa coluna.

45. Prova. Há vários modos de tirar a prova a uma operação de somar. A prova preferível, pela sua exatidão e por

ser ao mesmo tempo analitica, é a seguinte que tem o nome de prova real:

Passa-se um traço debaixo da soma e repete-se a adição, escrevendo debaixo de cada coluna a sua soma completa. A soma da primeira coluna é 21 unidades; a soma da segunda é 16 dezenas, ou 160 unidades e a soma da terceira é 9 centenas ou 900 unidades. Ora juntando os três resultados, teremos um total igual à soma das mesmas parcelas.

```
  3 3 7
  4 4 0
    9 6
  2 0 8
-------
1 0 8 1
-------
    2 1
  1 6 .
  9 . .
-------
1 0 8 1
```

Para tirar a prova de uma adição, temos a seguinte

Regra. *Repete-se novamente a adição, pondo debaixo de cada coluna a sua soma completa; adicionam-se depois as somas obtidas, e, se o resultado fôr igual à primeira soma, a operação estará certa.*

Efetuar as seguintes somas:

(**1.**)	(**2.**)	(**3.**)	(**4.**)	(**5.**)	(**6.**)
20	560	7500	15000	80900	1250
100	980	7950	16820	95890	800
120	750	8100	17360	99100	654
50	1220	8880	25830	100500	2380
180	2340	9500	29700	118000	4800
215	3580	9920	30810	136900	95
130	4660	10500	40500	159700	158
320	4000	11200	49600	180300	9000
480	5500	12040	50120	225400	25286
1615					

Resolver os seguintes problemas:

1. Um livreiro costumava registrar quantos livros vendia mensalmente. No primeiro mês anotou 20900; no segundo, 19100; no terceiro, 38700, e no quarto 21300; quanto vendeu nestes quatro meses ?

Solução. As quatro parcelas, escritas em coluna e somadas, dão um total de 100000 que foi o número de livros vendidos nos 4 meses.

```
  2 0 9 0 0
  1 9 1 0 0
  3 8 7 0 0
  2 1 3 0 0
-----------
1 0 0 0 0 0
```

2. Sara, Maria e Elisa vieram visitar Joana. Sara veio às 2 horas; Maria veio 15 minutos mais tarde, e Elisa veio 8 minutos depois da chegada de Maria. A que horas chegou Elisa?
Resp. 2 horas e 23 minutos.

3. Um cobrador recebeu no mês de Janeiro 75000 cruzeiros; no de Fevereiro, 68600 cruzeiros; no de Março 87300 cruzeiros e no de Abril, 72100 cruzeiros. Quanto recebeu nos 4 meses ? Resp. ?

4. Quantas pancadas sôa a campainha de um relógio desde 1 hora da madrugada até ao meio dia ? Resp. 78.

5. Janeiro tem 31 dias, Fevereiro 28, Março 31, Abril 30 e Maio 31; quantos dias perfazem estes 5 meses ? Resp. ?

6. Certo negociante vendeu 5004 arrobas de café; depois vendeu mais 325 arrobas, e, por fim, mais 1922 arrobas; quantas arrobas vendeu êle ? Resp. ?

7. Um pai deixou a um filho 7000 cruzeiros, a outro 5000, a outro 15.000 e ao mais velho 20.000; quanto deixou êle a todos ? Resp. ?

8. A idade de José é 8 anos, a de Francisco é 5 anos, e a de Guilherme é igual às idades de José e Francisco reunidas. Qual é a soma das três idades ? Resp. ?

9. João tem 8 laranjas, Francisco tem 7, e José tem o dôbro das laranjas de João; quantas laranjas teem os três?
Resp. ?

10. Achar a soma de todos os números consecutivos desde 119 até 131, incluindo estes dois números. Resp. 1625.

SUBTRAIR

46. Diminuir ou **subtrair** é tirar um número menor de um maior.

O número maior chama-se **minuendo**; o número menor chama-se **subtraendo**, e o resultado da subtração chama-se **resto, excesso** ou **diferença.**

Ilustração. Se tirarmos um número menor de outro maior, o resultado se chamará **resto**; se compararmas dois números desiguais entre si, o resultado se chamará **diferença**; se quisermos saber quanto um excede ao outro, o resultado se chamará **excesso.** Todos estes resultados se obteem por um só processo que é a subtração.

O sinal de subtrair é — que se lê: *menos*. Este sinal, escrito entre dois números, mostra que o segundo número deve ser subtraído do primeiro, como 5 — 3 = 2 que se lê: *5 menos 3 igual a 2, ou 5 menos 3 são 2.*

47. Subtrair é um processo inverso ao de somar; na operação de somar, temos as partes para se achar o todo; e na de subtrair, temos o todo e uma das partes, para se achar a outra parte.

48. Na operação de subtrair temos de observar os três seguintes princípios:

1° O minuendo e o subtraendo devem ser quantidades da mesma espécie.

2° O resto deve ser da mesma espécie que o minuendo.

3° Somando o subtraendo com o resto, obteremos o minuendo.

49. Na operação de subtrair ha dois casos para distinguir:

1.° Quando todos os algarismos do minuendo são **maiores** do que os algarismos correspondentes do subtraendo.

2° Quando alguns algarismos do minuendo são **menores** do que os correspondentes do subtraendo.

50. Primeiro caso. Quando os algarismos do minuendo são maiores do que os algarismos correspondentes do subtraendo, opera-se a subtração de cada ordem, escrevendo-se o resto debaixo dela.

Problema. Um menino tinha uma caixa com 28 penas, mas dando 16 a sua irmã, quantas lhe restaram ?

Observação. Escreveremos o número maior como minuendo, e o menor como subtraendo; começaremos depois a subtração pelas unidades, e diremos: 8 menos 6 são 2, que escreveremos debaixo das unidades. Nas dezenas, diremos: 2 menos 1 é 1, que escreveremos debaixo das dezenas. O resto é 12 penas.

Minuendo	28	penas
Subtraendo	16	penas
Resto	12	penas

Demonstração. Na solução dêste problema, vemos a demonstração dos três princípios da subtração.

1.° O minuendo e subtraendo são quantidades da mesma espécie, porque ambas são penas.

2.° O resto é da mesma espécie que o minuendo, porque é uma parte dêle.

3.° A soma do subtraendo e do resto é igual ao minuendo, porque o todo é igual à soma das suas partes. Somando, pois, 16 e 12, que são o subtraendo e o resto da operação, temos 28 que é o minuendo.

51. Segundo caso. Quando algum algarismo do minuendo é menor do que o algarismo correspondente do subtraendo, opera-se do modo seguinte:

Problema. Subtraindo 285 de 745, quanto resta?

Solução. Nas unidades, subtraindo 5 de 5, resta nada; escreveremos um zéro debaixo das unidades. Nas dezenas, como não podemos tirar 8 de 4, tomaremos 1 centena das 7, e como 1 centena tem 10 dezenas, juntaremos as 10 com as 4, e então teremos 14. Agora, de 14 tirando 8, restam 6, que escreveremos debaixo das dezenas. Como já tiramos uma centena das 7, só restam 6; então, 6 menos 2 são 4, que escreveremos debaixo das centenas. O resto da subtração é 460.

(6)	(14)	
7	4	5
2	8	5
4	6	0

Quando se opera, diz-se simplesmente: 5 menos 5, nada; 14 menos 8, seis; 6 menos 2, quatro, e, ao mesmo tempo que se enuncia cada diferença, escreve-se debaixo da coluna correspondente.

Prova. A soma do subtraendo e do resto deve ser igual ao minuendo; somando, pois, os dois termos, temos 745, número igual ao minuendo. Está, pois, certa a operação.

2	8	5
4	6	0
7	4	5

Para operar uma subtração, temos a seguinte

Regra: *Escreve-se o subtraendo debaixo do minuendo, ficando as unidades da mesma ordem em coluna.*

Começa-se a subtração pela ordem das unidades, e escreve-se o resto em baixo; se o algarismo de alguma ordem do minuendo fôr inferior ao da ordem correspondente do subtraendo, juntam-se 10 ao minuendo, e considera-se a ordem seguinte do minuendo com 1 de menos.

Para tirar a prova a uma subtração, temos a seguinte

Regra: *Adicionam-se o subtraendo e o resto; se a soma fôr igual ao minuendo, a subtração estará exata.*

Operar as seguintes subtrações:

	(2) (14) (15) (14)	(2.)	(3.)	(4.)
Minuendo	2 3 5 6 4	5 9 3 4 8	6 9 3 2 5 3	8 7 6 7 6 4
Subtraendo	1 2 8 6 5	4 9 3 2 9	3 0 2 9 0 1	7 3 5 9 2 5
Resto	1 0 6 9 9			

52. Prova dos noves. Este processo aritmético consiste em somar dois a dois todos os algarismos de um número, e tirar em cada soma os noves e adicionar o resto com o algarismo seguinte. Este processo é uma aplicação da adição e da subtração, e por isso o damos neste lugar.

Problema. Como se tira os noves do número 75684?

Solução. Começando a soma dos algarismos pelo lado esquerdo do número, diremos: 7 e 5 são 12, tirando 9 resta 3. Somando agora êste resto com o algarismo seguinte, diremos: 3 e 6 são 9, tirando 9 resta nada,

8 e 4 são 12, tirando 9 restam 3. Assim tirados os 9 do número dado, restam 3.

Quando se tira a prova dos noves, diz-se abreviadamente 7 e 5 *doze, noves-fóra*, 3 e 6 *nove nada*, 8 e 4 *doze, noves-fóra* 3.

Regra: *Na operação de somar, tiram-se os noves às parcelas e depois à soma, e, se o resto fôr igual, é presumivel que a conta esteja certa.*

Na operação de subtrair, tiram-se os noves ao minuendo, e depois ao subtraendo, junto com o resto, e, se os dois restos forem iguais, é presumível que a conta esteja certa.

Resolver os seguintes problemas:

1. Um colecionador devia a outro 325.920 selos; deu por conta 139.000. Quantos ficou devendo ?

Solução. Subtraindo-se 139000 de 325920, restam 186920, número de selos que a pessoa ficou devendo.

$$\begin{array}{r} 325920 \\ 139000 \\ \hline 186920 \end{array}$$

2. Subtrair 25630 de 39880. Resp. ?
3. 75835 — 25930 = ? " ?
4. Achar a diferença entre 4935 e 3786. " ?
5. Tirar 874 de 9974 " ?
6. Qual é o excesso de 994 sôbre 765 ? " ?
7. Que número se deve juntar a 5893 para fazer 6000 " ?
8. Uma pessoa comprou uma automovel por 45000 cruzeiros e vendeu-o por 60000; quanto ganhou ? Resp. ?
9. Isaac Newton morreu em 1729, com a idade de 85 anos; em que ano nasceu êle ? Resp. ?
10. A estátua de José Bonifácio, no largo de S. Francisco de Paula, mede 240 centímetros de altura; a estátua e o pedestal juntos medem 750 centímetros; quanto mede só o pedestal ? Resp. ?
11. A aldeia de S. Paulo de Piratininga foi elevada a vila em 1560, e, por carta régia de 24 de Julho de 1711, foi elevada à categoria de cidade. Quanto tempo a cidade de S. Paulo foi vila ? Resp. ?
12. A nossa representação nacional, no tempo do Império, constava de 60 senadores e 125 deputados gerais; qual é a diferença entre êstes dois numeros? Resp. ?
13. Em 1850, o Brasil exportou diversos produtos na importância de 141.068:470$, e em 1866, na de 155.020:906$; quanto aumentou a exportação neste ano ? Resp. ?

14. Segundo Delambre, o diâmetro da terra de norte a sul é de 12.712.648 metros, e o de leste a oeste é de 12.753.968 metros; qual é a diferença entre êstes dois diâmetros ? Resp. ?

15. A soma de dois números é 75421, um dêles é 19034, qual é o outro ? Resp. ?

MULTIPLICAR

53. Multiplicar é repetir um número tantas vezes, quantas são as unidades de outro.

O número que se multiplica chama-se **multiplicando;** o número pelo qual êste se multiplica chama-se **multiplicador,** e o resultado da operação chama-se **produto.**

O multiplicando e o multiplicador teem também o nome de **fatores** do produto.

Nota. Alguns autores preferem a seguinte definição: "A multiplicação é a operação que tem por fim, dados dois números, determinar um terceiro derivado do primeiro, assim como o segundo se deriva da unidade."

O sinal de multiplicar é × que se lê: *multiplicado por.* Este sinal, escrito entre dois números, mostra que estes números se devem multiplicar, como 3 × 2 = 6, que se lê: *3 multiplicado por 2 igual a 6.*

54. Na operação de multiplicar temos de observar os quatro princípios seguintes:

1° *O multiplicando pode ser número abstrato ou concreto.*

2° *O multiplicador deve ser considerado como número abstrato.*

3° *O produto deve ser da mesma espécie que o multiplicando.*

4° *A ordem em que tomarmos os fatores, não alterará o produto.*

55. Em uma multiplicação chama-se **fator simples** aquele que consta de um só algarismo, e **fator composto** o que consta de dois ou mais algarismos.

56. Na operação de multiplicar há três casos por distinguir:

1° Quando ambos os fatores, são numeros simples.

2.° Quando o multiplicando é número composto e o multiplicador é número simples.

3° Quando ambos os fatores são números compostos.

Primeiro caso. Quando ambos os fatores são números simples, multiplica-se um pelo outro, para o que é necessário saber perfeitamente a tabuada de multiplicar.

Problema. Se um tostão valia 5 vinténs, 4 tostões quantos vinténs valiam ?

Solução. Um tostão eram cinco vinténs; 2 tostões deviam ser 2 vezes 5 vinténs; 3 tostões deviam ser 3 vezes 5 vinténs; enfim, 4 tostões deviam ser 4 vezes 5 vinténs. Ora, como queremos saber quanto é 4 vezes cinco, 5 é o multiplicando e 4 é o multiplicador. Escreveremos primeiramente 5, e debaixo dêle escreveremos 4, depois faremos um traço, e diremos 4 vezes 5 são vinte, que escreveremos como produto, debaixo do traço.

Multiplicando	5	vinténs
Multiplicador	4	
Produto	20	vinténs

Demonstração. Na solução dêste problema, vêmos a demonstração dos quatro princípios da multiplicação.

1.° O multiplicando é um número concreto, porque é 5 vinténs, mas poderia ser número abstrato, se suprimíssemos a palavra vinténs.

2.° O multiplicador é considerado como número abstrato, porque só mostra o número de vezes que o multiplicando tem de ser tomado.

3.° O produto é da mesma espécie que o multiplicando, porque êle é o mesmo multiplicando repetido quatro vezes.

4.° A ordem em que tomarmos os fatores, não alterará o produto, pois se, em lugar de multiplicarmos 5 por 4, multiplicarmos 4 por 5, o produto será também 20, porque

4 vezes 5 são ... $5+5+5+5=20$
e 5 vezes 4 são $4+4+4+4+4=20$.

Se houver mais de dois fatores em uma multiplicação, a ordem dos fatores não alterará o produto, porque $2\times3\times4=3\times4\times2=4\times2\times3=24$.

57. Segundo caso. Quando o multiplicando tiver mais de um algarismo, e o multiplicador tiver um só, multiplicar-se-á cada um dos algarismos do multiplicando pelo multiplicador, começando pelas unidades.

Problema. Multiplicar 243 por 5.

Solução. Temos de multiplicar cada um dos algarismos do multiplicando por 5, que é o multiplidor. Começando pelas unidades, temos: 5 vezes 3 são 15 unidades, que formam 1 dezena e 5 unidades. Escreveremos as 5 unidades debaixo das unidades, e a dezena juntaremos com as dezenas que são 5 vezes 4, vinte, e 1, que vai das unidades, são 21. Ora, 21 dezenas são 2 centenas e 1 dezena; escreveremos 1 debaixo das dezenas, e as 2 centenas juntaremos com as centenas, que são 5 vezes 2 dez e 2 são 12 que escreveremos debaixo das centenas. O produto é 1215.

	Centenas	Dezenas	Unidades
	2	4	3
			5
1	2	1	5

```
  243
  243
  243
  243
  243
 ----
 1215
```

Demonstração. As parcelas de uma soma ou são números iguais ou números diferentes; se as parcelas são números diferentes, o único meio de achar o total é somá-las; mas se são números iguais, então há um meio mais fácil de achar a sua soma. Conhecida uma parcela e o número delas, podemos achar a sua soma por meio da multiplicação. Se uma parcela é 243, e o número das parcelas é 5, então a sua soma será 243×5=1215. Escrevendo as 5 parcelas em coluna, e somando-as, acharemos igualmente o total 1215 A multiplicação é um modo abreviado de somar números iguais.

Operar as seguintes multiplicações:

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
Multiplicando	2315	2840	3621	4896	5738
Multiplicador	2	3	4	5	6
Produto	4630				

6.	41834 × 7 = ?	**9.**	25643 × 4 = ?	**12.**	235846 × 7 = ?
7.	545 × 8 = ?	**10.**	89385 × 5 = ?	**13.**	459304 × 8 = ?
8.	1854 × 9 = ?	**11.**	2369 × 6 = ?	**14.**	502035 × 9 = ?

58. Terceiro caso. Quando o multiplicador constar de mais de um algarismo, haverá tantas multiplicações quantos forem os algarismos do multiplicador; e o resultado de cada multiplicação se chamará **produto parcial,** e a soma de todos os produtos se chamará **produto total.**

Problema. Multiplicar 458 por 234.

Solução. Temos de formar os três produtos seguintes:

		(1.°)	(2.°)
		458	458
		234	234
Produto parcial das unidades	458×4	1832	1832
Produto parcial das dezenas	458×30 . . .	13740	1374
Produto parcial das centenas	458×200 . . .	91600	916
Produto total	....	107172	107172

O primeiro algarismo do multiplicador representa 4 unidades, o segundo representa 3 dezenas que são 30 unidades, e o terceiro representa 2 centenas que são 200 unidades. Obtidos os três produtos parciais, somam-se, e o resultado 107172 é o produto total ou a reposta do problema. Para simplificar a operação, é costume suprimirem-se as cifras das dezenas e centenas, como se vê no segundo processo.

Não é rigorosamente necessário começar a multiplicação pelas unidades do multiplicador, póde-se também começar esta operação pelo primeiro algarismo da esquerda, escrevendo-se sempre o primeiro algarismo de cada produto parcial debaixo do algarismo multiplicador, como se vê no modêlo ao lado.

```
   458
   234
------
 916
 1374
  1832
------
107172
```

Demonstração. Os diversos produtos parciais de uma multiplicação são parcelas de uma soma chamada produto total; ora, em uma soma seja qual fôr a ordem em que se escreverem as parcelas, o resultado será sempre o mesmo.

59. O produto terá tantos algarismos quantos contiverem os dois fatores, ou menos um, se o produto dos dois últimos algarismos, multiplicados, juntamente com o que lhe fôr acrescentado, não exceder a nove.

Ilustração. No primeiro exemplo, sendo quatro os algarismos dos dois fatores, são também quatro os algarismos do produto, porque o produto 4×2, e mais 2 que vão das unidades excedem a 9. No segundo exemplo, o produto de 3×2 não excede a 9 nem tem auxílio na soma para o exceder.

(1.º)	(2.º)
25	22
46	32
150	44
100	66
1150	704

Para operar uma multiplicação, temos a seguinte:

Regra: *Escreve-se o multiplicador debaixo do multiplicando, de sorte que as unidades da mesma ordem fiquem em coluna, e sublinha-se.*

Se o multiplicador constar de um só algarismo, multiplica-se por êste termo o multiplicando, e o resultado será o produto. Se o multiplicador constar de mais de um algarismo, multiplica-se o multiplicando por cada um dos algarismos significativos do multiplicador, escrevendo o primeiro algarismo de cada produto parcial debaixo do algarismo multiplicador. A soma de todos os produtos parciais será o produto total.

Para tirar a prova a uma multiplicação, temos a seguinte

Regra: *Inverte-se a ordem dos fatores, pondo o multiplicando debaixo do multiplicador, e opera-se de novo a multiplicação e, se o resultado fôr igual ao primeiro, a operação estará exata.*

Prova dos noves. *Tiram-se os noves ao multiplicando e depois ao multiplicador; multiplicam-se os restos e tiram-se os noves ao produto total; se o resto fôr igual ao resto do produto supõe-se que a conta esteja certa.*

Operar as seguintes multiplicações, e notar o que há de especial nos últimos cinco exemplos:

1. 7198 × 216 = ? Resp. ?
2. 8862 × 189 = ? » ?
3. 7575 × 7575 = ? » ?
4. 15607 × 3094 = ? » ?
5. 93186 × 4455 = ? » ?

6. 12345679 × 9 = ? Resp. ?
7. 12345679 × 18 = ? » ?
8. 12345679 × 27 = ? » ?
9. 12345679 × 36 = ? » ?
10. 12345679 × 45 = ? » ?

Abreviações da multiplicação

Alguns casos da multiplicação podem ser **abreviados**, evitando-se assim trabalho desnecessário.

60. Para multiplicar um número por 10, 100 ou 1000, bastará acrescentar ao multiplicando tantas cifras, quantas tiver o multiplicador.

Demonstração. Já mostramos no n. 24 que acrescentando-se uma cifra ao lado direito de um número, toma-se o seu valor 10 vezes maior; acrescentando duas cifras torna-se o seu valor 100 vezes maior, etc. Logo, acrescentar-se uma cifra a um número é o mesmo que multiplicá-lo por 10, e assim por diante.

Exemplos

$$8 \times 10 = 80$$
$$8 \times 100 = 800$$
$$8 \times 1000 = 8000$$

61. Quando um ou ambos os fatores terminarem em cifras, multiplicam-se só os algarismos significativos e acrescentam-se ao produto total tantas cifras quantas contiverem os dois fatores.

Demonstração. No primeiro exemplo, suprimindo-se os dois zêros do multiplicando 4500, o produto ficará 1125, isto é, na centésima parte; mas acrescentando-se dois zêros ao produto, torna-se 100 vezes maior o seu valor, e ficará então exato. No outro exemplo, a demonstração é a mesma.

Exemplos

```
 4500       4500
   25       2500
 ----       ----
  225        225
  90         90
------    --------
112500    11250000
```

62. Quando alguma ordem central do multiplicador fôr ocupada por uma cifra, despreza-se essa cifra, e passa-se a fazer a multiplicação com a ordem seguinte, escrevendo-se o primeiro algarismo do produto debaixo do algarismo multiplicador.

Demonstração. No exemplo ao lado, vêmos que, fazendo a multiplicação com o zero, escrevemos três cifras que nenhum valor dão ao produto; abrevia-se, pois, a operação, desprezando-se aquelas cifras, e escrevendo o produto seguinte, como se vê na segunda operação.

Exemplos

```
  234       234
  102       102
  ---       ---
  468       468
234        000
-----     234
23868     -----
          23868
```

63. Quando o multiplicador é composto só de noves, evita-se a multiplicação juntando-se ao multiplicando tantas cifras quantos forem os noves do multiplicador, e dêste novo número, subtrai-se o multiplicando.

Problema. Multiplicar 456 por 999.

Solução. Acrescentando-se três cifras ao número 456, êste número ficará 456000; subtraindo dêle agora 456, ficará 455544, que é o produto.

```
456000
   456
------
455544
```

Demonstração. Acrescentando-se três cifras ao número 456, é o mesmo que multiplicá-lo por 1000, ou repetí-lo mil vezes, isto é, uma vez mais do que 999; ora, subtraindo-se de 456000 uma vez o número 456, êle ficará repetido só 999 vezes, e por isso, multiplicado só por 999.

Pelo mesmo princípio, se quisermos, por exemplo, multiplicar 456 por 11, acrescentaremos uma cifra ao multiplicando que ficará 4560, isto é, multiplicado por 10, ou repetido 10 vezes. Somando êsse produto com mais uma vez o número 456, o multiplicando ficará repetido 11 vezes, e teremos 5016 que é o produto.

```
4560
 456
----
5016
```

64. Quando os dois fatores de uma multiplicação tiverem sòmente unidades e dezenas, isto é, dois algarismos cada um, poderemos abreviar a multiplicação, se os algarismos das unidades sòmarem 10, e os das dezenas forem iguais, como vemos nos exemplos seguintes:

Multiplicando	18,	26,	58,	75,	99.
Multiplicador	12	24	52	75	91
Produto	...	...	....	....	....

Problema. Multiplicar 48 por 42, seguindo êste método.

Solução. Os dois fatores do problema teem as condições requeridas, porque os algarismos das unidades somam $8 + 2 = 10$.

Os algarismos das dezenas são iguais.

Multiplicando entre si as unidades, temos $2 \times 8 = 16$ que escreveremos no produto. Depois acrescentaremos 1 às dezenas do multiplicando, e teremos $4 + 1 = 5$. Multiplicando agora as dezenas, temos $4 \times 5 = 20$ que escreveremos à esquerda do produto das unidades e ficará 2016.

Quando o produto das unidades é $9 \times 1 = 9$ ou $1 \times 9 = 9$, prefixa-se-lhe um zéro e fica 09.

Dezenas	Unidades
4	8
4	2
20	16

(2016)

Verificação

```
  48
  42
 ---
  96
192
----
2016
```

Operar por êste modo as seguintes multiplicações:

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	(6.)	(7.)	(8.)
Multiplicando	18,	26,	58,	15,	76,	82,	88,	99.
Multiplicador	12	24	52	15	74	88	82	91
Produto	216	624						

65. Quando o multiplicando constar de dois algarismos, e o multiplicador fôr 11, abrevia-se a multiplicação, somando os dois algarismos do multiplicando, e escrevendo o resultado no meio deles, como 35 × 11 = 385.

O multiplicando é 35, a soma destes algarismos é 3 + 5 = 8; escrevendo esta soma entre os dois algarismos, temos 385 que é o produto.

Se a soma dos dois algarismos excede a 9, a dezena junta-se com o segundo algarismo, como 85 × 11 = 935.

Operar as seguintes multiplicações conforme as abreviaturas indicadas.

1.	225 × 100 =	Resp. ?	**9.**	8756 × 9999 =	Resp. ?
2.	320 × 250 =	» ?	**10.**	7563 × 1000 =	» ?
3.	531 × 201 =	» ?	**11.**	8543 × 2005 =	» ?
4.	7349 × 999 =	» ?	**12.**	25000 × 8000 =	» ?
5.	605 × 28 =	» ?	**13.**	75638 × 999 =	» ?
6.	700 × 600 =	» ?	**14.**	21500 × 7003 =	» ?
7.	85 × 85 =	» ?	**15.**	1364 × 11 =	» ?
8.	99 × 91 =	» ?	**16.**	3899 × 11 =	» ?

Multiplicação continuada

66. Uma multiplicação consta ordinariamente de dois fatores que são o multiplicando e o multiplicador; quando, porém, entram nesta operação mais de dois fatores, toma o nome de **multiplicação continuada;** assim 5 × 4 × 12 = 240 é uma multiplicação continuada, porque consta de mais de dois fatores.

A multiplicação continuada tem muitas aplicações, como veremos nos variados processos da Aritmética; aqui daremos só algumas.

67. Quando o multiplicador fôr composto de dois ou mais fatores simples, poderemos decompô-lo nesses fatores, e depois operar uma multiplicação continuada.

Problema. Multiplicar 36 por 28, operando só com fatores simples.

Solução. Como 28 é composto de 7×4, podemos multiplicar 36 por 7, que dá 252, e depois multiplicar êste produto por 4, e teremos 1008, que é o produto de 36 por 28.

Demonstração. Multiplicando 36 por 7, temos 252 que é 36 tomado 7 vezes. Multiplicando agora 252 por 4, temos 1008 que são 7 vezes 36 multiplicados por 4, ou 28 vezes 36. Portanto, no produto 1008, está o multiplicando 36 repetido 28 vezes, por meio da multiplicação continuada.

Processo

```
   3 6
     7
 -----
 2 5 2
     4
 -----
1 0 0 8
```

Operar as seguintes multiplicações pelo método exposto:

1.	29 × 21. (3 × 7) Resp. ?		**4.**	48 × 36.	Resp. ?
2.	31 × 32. (4 × 8) » ?		**5.**	51 × 42.	» ?
3.	43 × 35. (7 × 5) » ?		**6.**	65 × 56.	» ?

63. O quadrado de um número é o produto dêsse número multiplicado por si; assim o quadrado de 5 é 5 × 5 = 25; o quadrado de 10 é 10 × 10 = 100. **O cubo** ou **a terceira potência** do um número é o produto desse número tomado três vezes como fator em uma multiplicação continuada; assim o cubo de 3 é 3 × 3 × 3 = 27; o cubo de 4 é 4 × 4 × 4 = 64. **A quarta potência** de um número é o produto dêsse número tomado quatro vezes como fator de uma multiplicação continuada; assim, a quarta potência de 2 é 2 × 2 × 2 × 2 = 16; e assim por diante. Qualquer potência de um número se acha por meio de uma multiplicação continuada dêsse mesmo número.

Achar as seguintes potências:

1. O quadrado de 18.	Resp. ?	**5.** O quadrado de 45.	Resp. ?
2. O quadrado de 36.	» ?	**6.** O cubo de 15.	» ?
3. O cubo de 12.	» ?	**7.** A 4ª potência de 8.	» ?
4. O cubo de 20.	» ?	**8.** A 4ª potência de 12.	» ?

Resolver agora os seguintes problemas de multiplicar:

1. Em quanto importam 9 metros de terreno a 5800 cruzeiros cada metro?

Solução. 1 metro custa 5800 cruzeiros, 2 metros custam 2 vezes 5800 cruzeiros, 3 metros custam 3 vezes 5800 cruzeiros, enfim, 9 metros custam 9 vezes 5800 cruzeiros que são 52200 cruzeiros.

```
 5800
    9
-----
52200
```

2. Em quanto importam 8 automóveis a 22.000 cruzeiros cada?

3. Quanto custam 25 relógios a 650 cruzeiros cada um?

4. Quanto custam 35 livros a 40 cruzeiros cada um?

5. Em quanto importam 24 vestidos a 180 cruzeiros cada um?

6. Em quanto importam 184 sapatos a 100 cruzeiros cada um?

7. Em quanto importam 34 metros de seda a 25 cruzeiros cada metro?

8. Em quanto importam 85 malas a 360 cruzeiros cada uma?

9. Em quanto importam 23 quilos de manteiga cada quilo custando 11 cruzeiros?

10. Em quanto importam 445 gramas de ouro a 19 cruzeiros a grama?

11. Achar os vários produtos da nota abaixo, e somá-los.

2	*Quilos de manteiga*	*a*	*9 cruzeiros*	*18 cruzeiros*
7	*Queijos de Minas*	*a*	*6* "	"
8	*Quilos de carne sêca* ...	*a*	*3* "	"
10	*Lingua do Rio Grande* ..	*a*	*4* "	"
3	*Quilos de chá da India* ..	*a*	*8* "	"
8	*Ditos de café moido*	*a*	*3* "	"
15	*Ditos de toucinho*	*a*	*4* "	"
7	*Ditos de macarrão*	*a*	*2* "	"
				"
	Soma			*246* "

12. Achar o importe de cada quantidade de fazendas mencionada na conta abaixo, e somar todas as parcelas:

18	*Metros de nobreza de seda*	*a*	*21 cruzeiros*	*378 cruzeiros*
20	*Ditos de cambraia de linho*	*a*	*30* "	"
18	*Ditos de brim pardo*	*a*	*5* "	"
15	*Ditos de baeta azul*	*a*	*7* "	"
12	*Ditos de renda branca*	*a*	*3* "	"
17	*Ditos de fita de chamalote*	*a*	*8* "	"
5	*Dúzias de botões*	*a*	*6* "	"
16	*Metros de percale*	*a*	*3* "	"
10	*Ditos de cretone*	*a*	*5* "	"
25	*Ditos de chita*	*a*	*3* "	"
				"
	Soma			*1548* "

Tabuada de Pitágoras

LINHA HORIZONTAL

LINHA VERTICAL

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2	**4**	6	8	10	12	14	16	18
3	6	**9**	12	15	18	21	24	27
4	8	12	**16**	20	24	28	32	36
5	10	15	20	**25**	30	35	40	45
6	12	18	24	30	**36**	42	48	54
7	14	21	28	35	42	**49**	56	63
8	16	24	32	40	48	56	**64**	72
9	18	27	36	45	54	63	72	**81**

Nota. Os discípulos que aprenderem por êste compêndio, devem saber já perfeitamente a tabela inteira de todos os números simples, isto é, de um só algarismo; mas para auxiliar os menos dextros na multiplicação, damos aqui a Tabuada de Pitágoras, que poderá ajudá-los, em caso de dúvida.

O uso desta tábua é muito fácil. Se quisermos multiplicar, por exemplo, 6 por 7, procuraremos 6 na coluna vertical e dêsse quadro seguiremos com o dedo para a direita até o quadro que está debaixo do número 7 na linha horizontal, e acharemos o produto dos dois números, que é 42, porque 6 vezes 7 são 42. O mesmo se faz com os demais números.

DIVIDIR

69. Dividir é achar quantas vezes um número contém outro. O número que se divide, chama-se **dividendo;** o número pelo qual êste se divide, chama-se **divisor;** o resultado da operação chama-se **quociente,** e a quantidade que em algumas operações fica por dividir, chama-se **resto.**

A palavra quociente vem do latim *quocies* que significa *quantas vezes*. Na divisão, pois, o quociente mostra quantas vezes o divisor está contido no dividendo.

O sinal de dividir é ÷ que se lê: *dividido por*. Este sinal, escrito entre dois números, mostra que o primeiro deve ser dividido pelo segundo, como $8 \div 2 = 4$ que se lê: *8 dividido por 2 igual a 4*.

70. A divisão é o inverso da multiplicação. Na multiplicação dão-se dois fatores e requer-se o produto; na divisão dá-se o produto com o nome de dividendo, e um dos fatores com o nome de divisor, e requer-se o outro fator denominado quociente. Na multiplicação, com os fatores 3 e 4, obtemos o produto de $3 \times 4 = 12$, e na divisão, com o produto 12 e o fator 3, obtemos o outro fator que é $12 \div 3 = 4$.

Quando se opera a divisão, separa-se o dividendo do divisor por meio de duas linhas, como **234 | 2**

Na divisão temos de dividir cada um dos algarismos do dividendo pelo divisor, e por isso torna-se necessário começar a operação pela ordem mais elevada de unidades, porque se essa ordem não fôr exatamente divisível pelo divisor, o seu resto entrará na ordem seguinte para alí ser dividido.

71. A divisão tem duas aplicações diversas que são:

1ª Achar quantas vezes um número contém outro.
2ª Dividir um número em partes iguais.

Estas duas aplicações ficam perfeitamente claras nos dois problemas seguintes:

Primeira aplicação. Com 12 cruzeiros quantos livros podemos comprar do preço de 3 cruzeiros cada um?

Solução. Este problema tem por fim achar quantas vezes 3 estão contidos em 12. Ora, 2 vezes 3 são 6; 3 vezes 3 são 9, e 4 vezes 3 são 12. Portanto 12 conteem 4 vezes 3, e por isso com 12 cruzeiros podemos comprar 4 livros de 3 cruzeiros cada um.

```
12 | 3
00   4
```

Segunda aplicação. Dividindo-se 12 cruzeiros por 4 pessoas, que quantia receberá cada uma?

Solução. Este problema tem por fim dividir 12 em 4 partes iguais. Ora, dividindo-se um número por 2, divide-se em duas partes iguais; dividindo-se por 3, divide-se em 3 partes iguais; dividindo-se por 4, divide-se em 4 partes iguais, etc. Logo dividindo 12 por 4, temos uma das 4 partes, que é 3 cruzeiros.

```
12 | 4
00   4
```

72. Nestas duas aplicações notamos os seguintes princípios da divisão:

1° Quando o dividendo e o divisor forem números concretos, o quociente será um número abstrato.

2° Quando o divisor fôr abstrato, o quociente será da mesma espécie que o dividendo.

3° O resto é da mesma espécie que o dividendo, e deve ser sempre menor que o divisor.

4° O dividendo é igual ao produto do divisor multiplicado pelo quociente, mais o resto.

Demonstração dêstes quatros princípios. Se quisermos achar quantas vezes uma quantidade está contida em outra quantidade, estas duas quantidades devem ser da mesma espécie, e o quociente deve ser um número abstrato, porque só mostra quantas vezes a quantidade menor está contida na maior, como vimos no problema da primeira aplicação. Se dividirmos uma quantidade em partes iguais, o divisor deve ser abstrato, porque só mostra o número das partes e o quociente será da mesma espécie que o dividendo, porque é uma parte dêle como vimos no problema da segunda aplicação.

O resto é da mesma espécie que o dividendo, porque é a parte do dividendo que fica por dividir, e deve ser sempre menor do que o divisor, porque se fosse igual ou maior, poderia ser facilmente dividido por êle.

Finalmente, mostrando o quociente quantas vezes o divisor está contido no dividendo, claro que, se multiplicarmos o divisor pelo quociente, o produto junto com o resto, se o houver, será igual ao dividendo.

Divisor com um só algarismo

73. Na divisão há dois casos para distinguir:

1.° Quando o divisor consta de um só algarismo.
2.° Quando o divisor consta de mais de um algarismo.

Primeiro caso. Quando o divisor consta de um só algarismo, divide-se cada um dos algarismos do dividendo pelo divisor.

Problema. Dividir 8 9 2 4 por 4.

```
8 9 2 4 | 4
0 9     | 2 2 3 1
  1 2
    0 4
      0
```

Solução. Nesta divisão, temos 8 milhares, 9 centenas, 2 dezenas e 4 unidades para dividir por 4. Começaremos a divisão pela primeira ordem da esquerda; então, 8 dividido por 4 dá 2, que escreveremos no quociente, e então diremos 2 vezes 4 são 8 para 8 resta nada; escreveremos um zéro debaixo do 8. Depois, 9 dividido por 4 dá 2, que escreveremos no quociente, e diremos: 2 vezes 4 são 8, para 9 resta 1, que escreveremos debaixo do 9. Ora, esta centena de resto são 10 dezenas, juntando mais duas do dividendo fazem 12; então, 12 dividido por 4 dá 3; e 4 dividido por 4 dá 1. O quociente é 2231.

A disposição geralmente adotada é a que se vê ao lado, escrevendo-se cada algarismo ao lado do ultimo resto.

74. Se quisermos saber quantas vezes o número 6 está contido no número 30, o meio natural será subtrairmos sucessivamente 6 de 30, e quando esgotarmos o número 30, acharemos quantas vezes 6 está contido em 30.

Ilustração. Fazendo a subtração continuada, temos 30 — 6 = 24; 24 — 6 = 18, 18 — 6 = 12; 12 — 6 = 6; 6 — 6 = 0. Como fizemos 5 subtrações, o número 30 contém 5 vezes o número 6. Este é o método chamado espontâneo.

Podemos achar o mesmo resultado por um meio mais fácil e abreviado, fazendo uma só divisão; pois se dividirmos 30 por 6, teremos, 30 ÷ 6 = 5, e veremos logo que 30 contém 5 vezes o número 6. Este é o método chamado sistemático.

Para acharmos, por exemplo, quantas vezes o número 4 deve estar contido no número 8924, por meio do processo espontâneo, seria necessário fazermos 2231 subtrações, o que seria demasiadamente trabalhoso e enfadonho; a divisão sistemática porém, abrevia consideravelmente o cálculo, porque com uma só operação obtemos o mesmo resultado. A divisão é, pois, um modo abreviado de fazer uma subtração continuada de números iguais.

Os discípulos verificarão a exatidão das seguintes divisões:

1.	693 ÷ 3 = 231	**6.**	16394 ÷ 7 = 2342
2.	848 ÷ 4 = 212	**7.**	36168 ÷ 8 = 4521
3.	4682 ÷ 2 = 2341	**8.**	28935 ÷ 9 = 3215
4.	1170 ÷ 5 = 234	**9.**	20000 ÷ 4 = 5000
5.	63942 ÷ 6 = 10657	**10.**	100000 ÷ 8 = 12500

Divisão com resto

75. Quando o divisor dividir exatamente o dividendo, a divisão ficará completa, e o divisor multiplicado pelo quociente dará um produto igual ao dividendo. Quando, porém, o divisor não dividir exatamente o dividendo, ficará um resto por dividir, porque êsse resto será sempre inferior ao divisor.

Problema. Dividindo 7 maçãs por 2 meninos, quantas maçãs receberá cada um?

Solução. 7 dividido por 2, o quociente é 3, e fica 1 de resto por dividir; logo cada menino receberá 3 maçãs, e ficará 1 maçã por dividir. Para completar a divisão poderíamos dividir esta maçã em duas partes iguais, e dar uma parte a cada menino, e então cada menino receberia 3 maçãs e meia. Mas como êste ensino entraria já na teória das frações, reservamos êste ponto para quando lá chegarmos. Ali aprenderemos também a dividir o resto para completar o quociente.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \hline 1 & 3 \end{array}$$

Achar o quociente e o resto das seguintes divisões:

1. Dividir 21513 por 2.
2. Dividir 13580 por 3.
3. Dividir 3587 por 4.
4. Dividir 48767 por 5.
5. Dividir 35217 por 6.
6. Dividir 23234 por 7.
7. Dividir 45382 por 8.
8. Dividir 738764 por 9.

Divisor com mais de um algarismo

76. Segundo caso. Quando o divisor consta de mais de um algarismo, começa-se a divisão separando no dividendo tantos algarismos, quantos tiver o divisor, e ainda mais um, se os algarismos separados no dividendo formarem um número inferior ao divisor.

(1°)	(2°)	(3°)
4 3 3 | 1 8	1 2 3 4 1 | 25	3 6 4 5 6 | 2 5 6 4

Ilustração. No primeiro exemplo, separam-se dois algarismos, porque são dois os algarismos do divisor; no segundo exemplo, separam-se três algarismos, porque 12 é menor do que 25; e no terceiro exemplo, separam-se quatro algarismos, porque são quatro os algarismos do divisor.

77. Antes de operarmos uma divisão, já podemos saber quantos algarismos terá o quociente. Para isto, bastará só contar os algarismos do dividendo a partir do último algarismo marcado para a direita, e o número de algarismos que alí houver, será o número de algarismos do quociente. Assim o quociente do primeiro exemplo terá só dois algarismos; o do segundo terá três, e o do terceiro terá dois, e do mesmo modo nos outros casos.

Problema. Dividir 5 3 9 8 por 1 3.

Solução. Temos de dividir 5 milhares, 3 centenas, 9 dezenas e 8 unidades por 13, e como não podemos dividir 5 milhares por 13, temos de tomar mais outra ordem, e então teremos 53 centenas que já podemos dividir por 13. Em 53 quantas vezes há 13?. Há 4; escreveremos 4 no quociente, e multiplicando êste algarismo pelo divisor, temos 4 × 13 = 52 que, subtraido do dividendo, deixa 1 de resto.

Descendo agora o algarismo seguinte, teremos 19 para novo dividendo, e procedendo-se como acima, depois de três divisões continuadas, acharemos que o quociente da divisão é 415, e que ficam 3 de resto.

Operação

```
5 3 9 8 | 1 3
5 2       4 1 5
---
  1 9
  1 3
  ---
    6 8
    6 5
    ---
      3
```

Prova. Multiplicando agora o quociente pelo divisor, e ao produto juntando o resto da divisão, obteremos exatamente o dividendo, pois (415 × 13) + 3 = 5398.

Para operar uma divisão, temos a seguinte:

Regra: *Escreve-se o divisor, à direita do dividendo, separado por um risco, sublinha-se o divisor, e sob o risco se escreve o quociente.*

Separam-se no dividendo tantos algarismos, quantos contém o divisor, e mais um ainda, se o número formado pelos algarismos separados fôr menor que o divisor. Este número é o primeiro dividendo parcial.

Acham-se quantas vezes o divisor está contido no primeiro dividendo parcial e o resultado escreve-se no quociente.

Multiplica-se o divisor pelo número achado e o produto subtrai-se do dividendo; o resto junto com o algarismo seguinte do dividendo forma um novo dividendo parcial. Assim se continua, até se dividirem todas as ordens do dividendo total.

Nota. Se algum dividendo parcial fôr menor que o divisor, escreve-se uma cifra no quociente, e desce-se mais um algarismo do dividendo total para o dividendo parcial, e continua-se a divisão.

Para tirar a prova de uma divisão, temos a seguinte:

Regra: *Multiplica-se o divisor pelo quociente; ao produto junta-se o resto, se o houver, e se o resultado fôr igual ao dividendo, a operação estará exata.*

Prova dos noves. *Tiram-se os noves ao divisor e depois ao quociente, multiplicam-se os dois restos, e ao produto junta-se o resto do resto da divisão, si o houver, e o resultado será igual ao resto, que deixar o dividendo, tirando dêle os noves.*

Operar as seguintes divisões:

1.	840 ÷ 12 = ?	**11.**	96439 ÷ 23 = ?
2.	936 ÷ 13 = ?	**12.**	123450 ÷ 25 = ?
3.	1344 ÷ 14 = ?	**13.**	506376 ÷ 36 = ?
4.	6465 ÷ 15 = ?	**14.**	506394 ÷ 47 = ?
5.	8928 ÷ 16 = ?	**15.**	789408 ÷ 77 = ?
6.	28764 ÷ 17 = ?	**16.**	574583 ÷ 84 = ?
7.	49320 ÷ 18 = ?	**17.**	25312 ÷ 112 = ?
8.	76323 ÷ 19 = ?	**18.**	105672 ÷ 204 = ?
9.	85323 ÷ 21 = ?	**19.**	235843 ÷ 845 = ?
10.	86438 ÷ 22 = ?	**20.**	483698 ÷ 2364 = ?

78. Para dividir um número por 10, 100, 1000, etc., bastará só cortar à direita do dividendo tantos algarismos, quantas forem as cifras do divisor.

Problema. Dividir 745 por 100.

Solução. Como o divisor tem duas cifras, teremos de cortar dois algarismos do dividendo, e então o quociente será 7, e o resto 45.

$$475 \div 100 = 4,75$$

Demonstração. Tirando-se uma cifra do lado direito de um número, será o mesmo que dividi-lo por 10, porque fica reduzido à sua décima parte; tirando-se duas cifras será o mesmo que dividí-lo por 100. Ora, no exemplo acima, se os algarismos cortados fossem duas cifras, desprezávam-se, porque não tinham valor algum, mas como são dois algarismos significativos, estes ficam como resto da divisão.

1. Dividir 4585 por 10 .... Resp. 458,5
2. Dividir 5800 por 100 .... " 58
3. Dividir 9550 por 10 .... " ?
4. Dividir 98000 por 1000 .... " ?
5. Dividir 7854386 por 10000 .... " ?

79. Quando o divisor pode ser decomposto em dois fatores simples, podemos também dividir o dividendo por um dêsses fatores, e depois dividir o quociente pelo outro fator, como vemos no exemplo seguinte:

Problema. Custando 35 carneiros 315 cruzeiros qual é o preço de cada um ?

Solução. O divisor 35 decompõe-se nos fatores 5 e 7, porque 5 vezes 7 são 35. Dividindo-se 315 cruzeiros por 5, o quociente é 63 cruzeiros; dividindo depois 63 cruzeiros por 7, o quociente é 9 cruzeiros, que é o preço de cada carneiro.

Prova 315 ÷ 35 = 9.

```
315 | 5
15    63 | 7
0      0   9
```

Demonstração. Dividindo 315 cruzeiros por 5, temos o quociente 63 cruzeiros, que é a quinta parte do dividendo; ora a quinta parte do divisor 35 é 7; portanto 63 cruzeiros é o preço de 7 carneiros; dividindo-se agora 63 cruzeiros por 7, temos 9 cruzeiros que é o preço de um carneiro.

Operar dêste modo as seguintes divisões:

1. Dividir 483 por 21. (3 × 7) .... Resp. 23
2. Dividir 441 por 49. (7 × 7) .... " ?
3. Dividir 720 por 45. (5 × 9) .... " ?
4. Dividir 1288 por 56. (7 × 8) .... " ?

Resolver os seguintes problemas:

1. Custando 5 chapéus 35 cruzeiros, qual é o preço de cada chapéu ?

Solução. Para acharmos o valor de cada chapéu, temos de dividir 35 cruzeiros em 5 partes iguais. Ora 35 cruzeiros divididos por 5, dá o quociente 7 cruzeiros, que é o preço de cada chapéu.

35	5
0	7

2. Se 30 metros de fazenda custaram 765 cruzeiros, quanto custou cada metro ? Resp. ?
3. Dividindo-se 1083 cruzeiros entre 19 homens, quanto receberá cada um ? Resp. ?
4. Quantas vezes o número 1024 está contido no número 1048576 ? Resp. 1024 vezes.
5. Comprei 28 cavalos por 14000 cruzeiros; quanto me custou cada cavalo ? Resp. ?
6. Multiplicando a soma de 148 e 56 pela sua diferença, e dividindo o produto por 23, qual é o quociente ? Resp. 816.
7. Se 55 barricas de farinha custaram 1650 cruzeiros, quanto custou cada barrica ? Resp. ?

Teoremas relativos à divisão

80. Teorema 1°. *Em uma divisão, multiplicando-se o divisor, o quociente vem dividido; dividindo-se o divisor, o quociente vem multiplicado.*

Demonstração. Se dividirmos, por exemplo, 12 por 4, o quociente será 3, porque 12 contém 3 vezes 4. Ora, se o divisor aumentar, já o dividendo não o poderá conter 3 vezes exatas. Se o divisor fôr 6, só o poderá conter 2 vezes.

Pelo contrário, se o divisor diminuir e ficar reduzido a 2, o dividendo o poderá conter mais de 3 vezes; com efeito, contém 6 vezes.

O quociente, pois, aumenta e diminue na razão inversa do divisor.

81. Teorema 2°. *Se o dividendo e o divisor forem multiplicados ou divididos por um mesmo número, o quociente não sofrerá alteração.*

Demonstração. Em uma divisão exata, o quociente mostra quantas vezes o divisor está contido no dividendo; ora, se 12 contém 2 vezes 6, é claro que o dôbro de 12 deve conter 2 vezes o dôbro de 6. Do mesmo modo, a metade de 12 deve conter 2 vezes a metade de 6, como se vê ao lado.

$$12 \div 6 = 2$$
$$(12 \times 2) \div (6 \times 2) = 2$$
$$(12 \div 2) \div (6 \div 2) = 2$$

82. Teorema 3°. *Se o dividendo e o divisor forem multiplicados ou divididos por um mesmo número, o quociente não sofrerá alteração, mas se houver resto, êste ficará multiplicado ou dividido por êsse número.*

Demonstração. O dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente, mais o resto. O resto é, pois, a diferença que se obtem em uma subtração feita na operação de dividir, ou simplesmente o resultado de uma subtração. Ora, se o minuendo e o subtraendo aumentam um certo número de vezes, o resto também deve	8 — 6 = 2 16 — 12 = 4 24 — 18 = 6 4 — 3 = 1

aumentar; porque si a diferença entre 8 e 6 é 2, a diferença entre 16 e 12, que são duas vezes aqueles números, deve ser também duas vezes o seu valor, isto é, 4; e a diferença entre 24 e 18 deve ser 6, etc. Do mesmo modo, os dois números, sendo reduzidos à metade, o resto também o será, como 4 — 3 = 1.

83. Do segundo teorema podemos tirar a seguinte dedução: *Quando o dividendo e o divisor terminarem em cifras, podemos abreviar a operação, cancelando igual número de cifras em ambos os termos.*

Problema. Dividir 14400 por 800.

Solução. Cancelando duas cifras no dividendo e duas no divisor, temos de dividir 144 por 8, que dá o quociente 18.

144~~00~~	8~~00~~
64	18
0	

Demonstração. Cancelando duas cifras no dividendo, é o mesmo que dividí-lo por 100; cancelando duas cifras no divisor, é o mesmo que dividí-lo por 100. Ora, dividindo o dividendo e o divisor por um mesmo número, estes dois termos conservam entre si a mesma relação, e por isso não se altera o valor do quociente.

1.	5500 ÷ 500 =	Resp. 11	**5.**	9480 ÷ 120 =	Resp. ?
2.	7200 ÷ 480 =	" ?	**6.**	14700 ÷ 700 =	" ?
3.	7500 ÷ 150 =	" ?	**7.**	48600 ÷ 500 =	" ?
4.	8000 ÷ 20 =	" ?	**8.**	87000 ÷ 150 =	" ?

O inverso das quatro operações fundamentais

84. Na exposição das quatro operações fundamentais sôbre os números inteiros vimos que.

Na **adição**, sendo dadas as parcelas, achamos a sua soma.

Na **subtração,** sendo dados o minuendo e o subtraendo achamos o resto.

Na **multiplicação,** sendo dados o multiplicando e o multiplicador, achamos o produto.

Na **divisão,** sendo dados o dividendo e o divisor, achamos o quociente.

Ora, desde que a subtração é um processo inverso ao da adição, e a divisão é um processo inverso ao da multiplicação, segue-se que, se tivermos o resultado de qualquer operação fun-

damental e um dos termos que o produziu, e quisermos achar o outro, o processo é operarmos em sentido inverso ao da operação efetuada, de modo que

Na **adição,** a soma das parcelas conhecidas, subtraída da soma total, dá a parcela desconhecida.

Na **subtração,** o subtraendo somado com o resto dá o minuendo.

Na **multiplicação,** o produto dividido por um dos fatores dá o outro fator.

Na **divisão,** o quociente multiplicado pelo divisor dá o dividendo.

REDUÇÃO À UNIDADE

85. Redução à unidade é um processo da Aritmética que tem por fim achar o valor ou o resto de uma unidade, para depois se calcular o importe de qualquer número de unidades. Este processo faz parte da *Solução analítica*, dêle trataremos circunstanciadamente no seu lugar respectivo, quando o aluno já souber frações, complexos e outros pontos indispensáveis para a solução das diversas questões desta natureza. Aqui daremos sòmente os processos graduados que podem ser facilmente resolvidos com o simples conhecimento das quatro operações fundamentais, sôbre números inteiros. Estes exercícios servem de ensaio ou preparo mental para as soluções mais complicadas que adiante teremos de encontrar.

Primeiro processo da redução à unidade

(RAZÃO DIRETA)

1. **Custando 5 quilos de café 15 cruzeiros, quanto deve custar 1 quilo ?**

2. Custando 9 metros de morim 36 cruzeiros, quanto custou cada metro ? Resp. ?

3. Se 8 garrafas de vinho custaram 40 cruzeiros, quanto custou cada garrafa ? Resp. ?

4. Gastando 7 pessoas 21 cruzeiros em um almoço, quanto gastou cada uma ? Resp. ?

5. Se um operário ganhou 30 cruzeiros em 6 dias, quanto ganhou por dia ? Resp. ?

6. Comprei 9 galinhas por 27 cruzeiros, quanto me custou cada uma ? Resp. ?

Segundo processo da redução à unidade

(RAZÃO DIRETA)

7. Custando 5 caixas de laranjas 40 cruzeiros, 7 caixas quanto devem custar ?

Solução. Como vimos nos problemas precedentes, 5 caixas custando 40 cruzeiros, 1 só caixa deve custar $40 \div 5 = 8$ cruzeiros e 7 caixas devem custar 7 vezes 8 cruzeiros que são 56 cruzeiros.

$40 \div 8 = 5$ cruzeiros
$8 \times 7 = 56$ cruzeiros

8. Se 8 metros de chita custam 24 cruzeiros quanto devem custar 9 metros ? Resp. ?

9. Custando 3 sacos de farinha 21 cruzeiros, quanto devem custar 5 sacos ? Resp. ?

10. Se 9 cavalos comem 27 quilos de milho por dia, 7 cavalos quantos quilos devem comer ? Resp. ?

11. Quanto me custaram 12 carneiros, sabendo-se que o preço de 7 carneiros é 63 cruzeiros ? Resp. ?

12. Se 4 quilos de chá superior custam 44 cruzeiros, quanto devem custar 9 quilos ? Resp. ?

Nota. Nos 12 problemas que acabamos de resolver, vimos que, aumentando o número de unidades, aumenta na mesma razão o seu valor correspondente, e diminuindo, diminue também na mesma razão o seu valor, e por isso se diz que estes dois números aumentam ou diminuem **na razão direta.**

Primeiro processo da redução à unidade

(RAZÃO INVERSA)

13. Se 5 homens fazem um serviço em 4 dias, 1 só homem em quantos dias o fará?

Solução. Se 5 homens precisam de 4 dias para fazer a obra, 1 só homem precisa de 5 vezes mais tempo, e por isso fará a obra em $4 \times 5 = 20$ dias.

$4 \times 5 = 20$

14. Certa quantidade de mantimentos chega para sustentar 8 trabalhadores em 6 dias; ficando 1 só trabalhador, por quantos dias o poderá sustentar? Resp. ?

15. Se 6 homens podem fazer uma cêrca em 5 dias, em quantos dias a fará 1 só homem? Resp. ?

16. Um campo fornece pastagem para 7 animais, durante 6 dias; ficando alí 1 só animal, durante quantos dias terá pastagem?
Resp. ?

17. Se 3 operários podem forrar duas salas em 5 dias, em quantos dias as poderá forrar um só operário? Resp. ?

18. Podendo 4 animais de carga transportar trezentas sacas de café em 5 dias, em quantos dias um só animal as poderá transportar?
Resp. ?

Segundo processo da redução à unidade

(RAZÃO INVERSA)

19. **Se 4 homens podem fazer um serviço em 9 dias, em quantos dias 12 homens o poderão fazer?**

Solução. Se 4 homens fazem o serviço em 9 dias, 1 homem o fará em 4×9=36 dias; e 12 homens o farão em 36 ÷ 12 = 3 dias.

$4 \times 9 = 36$
$36 \div 12 = 3$

20. Se 6 homens colhem todo o café de uma fazenda em 15 dias, 10 homens em quantos dias o colherão? Resp. ?

21. Se 12 operários podem edificar uma casa em 6 semanas, acrescentando mais 6 operários, em quantos dias a farão?
Resp. 4 semanas.

22. Calculou-se que 16 homens podiam fazer um atêrro em 20 dias, mas não aparecendo senão 10 trabalhadores, em quantos dias ficaria o atêrro pronto?
Resp. 32 dias.

23. Se 14 alfaiates podem fazer um fardamento em 300 dias, acrescentando mais 6 alfaiates, em quantos dias o fariam?
Resp. 210 dias.

Nota. Desde o problema 13.° até o 24° notamos que diminuindo o número de trabalhadores, aumenta o número de dias de serviço, e aumentando o número de trabalhadores, diminue o de dias de serviço, por isso se diz que estes dois números diminuem ou aumentam na razão inversa.

86. A redução à unidade tem muitas outras aplicações. Se dividirmos um número por 2, o quociente será a metade dêsse número; se o dividirmos por 3, o quociente será a sua terça parte; se o dividirmos por 4, o quociente será a quarta parte, e assim por diante. De sorte que se quisermos achar a soma de qualquer quantidade de partes de um número, temos de achar primeiro o valor de uma parte, isto é, de uma *unidade*, como se vê nos exemplos seguintes:

24. Quanto é sete oitavos de 16?

Solução Um oitavo de 16 é $16 \div 8 = 2$; ora, se um oitavo é 2, sete oitavos são $2 \times 7 = 14$. Portanto sete oitavos de 16 são 14.

$16 \div 8 = 2$
$2 \times 7 = 14$

25. Quanto é sete oitavos de 32? Resp. 28.
26. Quanto é cinco sextos de 24? Resp. 20.
27. Quanto é nove décimos de 30? Resp. 27.
28. Achar cinco nonos de 36. Resp. ?
29. Achar dois setimos de 63. Resp. ?
30. Achar tres quartos de 40. Resp. ?
31. Achar quatro quintos de 100. Resp. ?
32. Achar três quartos de 20 Resp. ?
33. Achar dois terços de 60. Resp. ?
34. Achar quatro quintos de 10. Resp. ?

87. Não podemos apresentar aquí toda a variedade de problemas que podem ser resolvidos pelo processo da redução a unidade, porque tomaríamos grande parte dêste livro. Passemos, pois a problemas de outra natureza, que podem ser resolvidos só com o conhecimento das quatro operações fundamentais sôbre números inteiros.

35. **A soma de dois números é 41, e a sua diferença é 9; quais são os dois números?**

Solução. Como um número excede 9 ao outro, segue-se que se subtrairmos 9 de 41, ficará no resto 32, o dôbro do número menor. Então o número menor é 16, e o maior $16 + 9 = 25$.

$41 - 9 = 32$
$32 \div 2 = 16$
$16 + 9 = 25$

Soma: $16 + 25 = 41$
Diferença: $25 - 16 = 9$

36. A soma de dois números é 65, e a sua diferença é 13, quais são os dois números?

37. A soma de dois números é 50, e um é 18 maior do que o outro; quais são os números?

38. Dividir 21 amêndoas entre dois meninos, de sorte que um fique com 3 mais do que o outro.

39. **Dois homens partiram ao mesmo tempo e do mesmo lugar, em direções opostas; um andava 4 quilômetros por hora, e o outro 6 quilômetros; a que distância estava um do outro no fim de três horas?**

Solução. No fim de uma hora, êles estavam distantes um do outro 4+6=10 quilometros; e no fim de 3 horas, estavam 10×3=30 quilometros.

$4 + 6 = 10$
$10 \times 3 = 30$

40. Duas locomotivas partiram de uma estação no mesmo momento, em direções opostas; uma com a velocidade de 35 quilômetros por hora, e a outra com a velocidade de 45 quilômetros, no fim de 2 horas, a que distância estava uma da outra?

Resp. ?

Nota. Na solução analítica desenvolveremos convenientemente todos estes pontos.

IGUALDADE E DESIGUALDADE

88. Chama-se **igualdade** a duas quantidades do mesmo valor, separadas pelo sinal =, como $4 + 3 = 7$ que se lê: *4 mais 3 igual a 7.*

89. Chama-se **desigualdade** a duas quantidades de valores diferentes, separadas pelos sinais > ou <, como
$30+2>30-10$ que se lê: *20 mais 2 é maior do que 30 menos 10.*
$30<45$ que se lê: *30 é menor do que 45.*
A abertura do sinal mostra a quantidade maior.

90. A quantidade que fica à esquerda do sinal de igualdade ou desigualdade, chama-se **primeiro membro**, e a que fica à direita, chama-se **segundo membro**, como se vê no seguinte modêlo:

1º membro 2º membro
$$4+8-7=10+2+1-8$$

Cada parte de um membro, que leva os sinais + ou —, chama-se **termo.** Na igualdade acima, o 1.º membro tem 3 termos, e o 2.º membro tem quatro. Os números que levam os sinais × ou ÷ não são termos, mas sim fatores ou divisores dos termos.

Quantidades positivas e negativas

91. Se um número fôr multiplicado por um número inteiro, êle se tornará tantas vezes maior quantas forem as unidades do multiplicador. Se um número fôr dividido, êle diminuirá na proporção da grandeza do divisor. É evidente, pois, que a adição e a subtração são as concepções fundamentais em todas

as operações da Aritmética, e por isso todos os números podem ser classificados do modo seguinte:

1.° Números que se adicionam ou **números positivos.**
2.° Números que se subtraem ou **números negativos.**

92. Os números positivos são indicados pelo sinal + e os números negativos são indicados pelo sinal —; de sorte que o número + 8 é positivo, e o número — 8 é negativo. Quando um número não é precedido por um sinal é considerado como positivo, porque realmente é + 4 + 3 = 7.

93. Os sinais × e ÷ não mostram se os seus resultados devem ser adicionados ou subtraídos, êles simplesmente indicam as operações que se devem realizar sôbre números positivos ou negativos.

Ilustração. Na expressão 12—5×2, vemos que 5 deve ser multiplicada por 2, e então temos 10. O sinal ×, porém, não mostra o que devemos fazer com o produto 10; o sinal — escrito antes do número 5 é que nos mostra que de 12 se tem de subtrair o produto de 5×2=10, e o resultado da expressão é 12 —10=2.

Do mesmo modo, na expressão 18+12÷4, o sinal ÷ mostra sòmente que 12 deve ser dividido por 4; o que, porém, se deve fazer com o quociente 3, é indicado pelo sinal + posto antes de 12, e o resultado é 18+3=21.

94. Em uma expressão numérica, os sinais + ou — dominam o resultado inteiro das operações indicadas entre êles e os seguintes sinais + ou —.

Ilustração. Na expressão 5+3×2×4—2×6, o sinal + indica que a 5 se tem de adicionar não 3, mas o produto de 3×2×4, que é 24, e então temos 5+24=29. O sinal — mostra que de 29 temos de subtrair o produto de 2×6=12; e o resultado da expressão é 29—12=17. Quando os sinais × e ÷ estão em seguimento, deve-se operar na ordem em que êles se acham. Assim em 16÷2×4, temos de dividir 16 por 2, e multiplicar o quociente 8 por 4, que faz 32. Se outro resultado se quisesse indicar, seria necessário escrever 16÷(2×4).

Problemas. Qual é o resultado da expressão

4×3+7×2—12÷4?

Solução. Operando as duas multiplicações e a divisão, temos 12+14—3=23 que é o resultado da expressão.

4×3+7×2—12÷4= ?
12 + 14 — 3 = 23

Regra: *Para se achar o resultado de uma expressão numérica, operam-se primeiro as multiplicações e divisões, se as houver, e da soma dos números positivos subtrai-se a soma dos números negativos.*

O aluno resolverá os seguintes exercícios de aplicação:

1. $2 + 5 \times 3 - 2 \times 3 = 11$
2. $7 \times 8 - 15 \div 3 - 9 = 42$
3. $10 - 7 + 3 \times 12 - 3 = 36$
4. $18 \times 15 - 10 \div 5 + 9 = ?$
5. $8 + 4 \times 9 - 7 \times 3 = ?$
6. $9 + 3 \times 5 + 6 - 25 = ?$

Uso do parêntesis

95. O Parêntesis —— é um sinal de agregação, e indica que se deve operar com o resultado que se acha dentro do parêntesis; assim a expressão 15 — (8 — 5) indica que temos de subtrair (8 — 5) que é 3; então 15 — 3 = 12. Si tirássemos o parêntesis, o resultado seria diferente, pois 15 — 8 — 5 = 2.

Ilustração. Quando o sinal que rege o parentesis é +, pode-se tirar o parentesis sem alterar o valor da quantidade. Exemplo 8 + (7 — 5) = 10 que é 8 + 7 — 5 = 10.

Quando, porém, o sinal que rege o parêntesis é —, para se tirar o parêntesis, sem alterar o valor da quantidade, é necessário trocar os sinais dos termos que estão dentro do mesmo parêntesis. Exemplo: 15 — (6 — 2 + 4) é igual a 15 — 6 + 2 — 4 = 7.

Exercícios para resolver:

1. $5 + (7 \times 9 \times 2) = 131$
2. $10 + 9 - (7 + 3) = 9$
3. $30 - (40 - 15) = 5$
4. $25 - (35 - 20) + 5 = 15$
5. $(5 \times 6) \times (6 \times 5) = ?$
6. $(2 + 14) \times 2 + 14 = ?$
7. $(25 - 16) \times 6 - 30) = ?$
8. $25 + 36 \times (15 + 20) = ?$

COMPLEMENTOS DOS NÚMEROS

96. Complemento de um número é outro número que junto ao primeiro, completa uma unidade da ordem imediatamente superior ao número dado.

Assim o complemento de 6 é 4, porque 6 + 4 = 10. Uma dezena é a ordem imediatamente superior a 6 que são unidades simples. O complemento de 75 é 25, porque 75+25=100. Uma centena é a ordem imediata superior a 75.

Problema. Qual é o complemento de 648?

Solução. A unidade superior às centenas é um milhar; subtraindo-se 648 de 1000, resta 352 que é o complemento do número dado.

$$\begin{array}{r} 1000 \\ 648 \\ \hline 352 \end{array}$$

Regra: *Para se achar o complemento de um número, subtrai-se o número dado de outro formado de 1 e tantos zeros, quantos algarismos contiver o número dado; o resto será o complemento.*

Achar o complemento dos seguintes números:

1. 329 | **3.** 9001 | **5.** 457309
2. 7879 | **4.** 38950 | **6.** 750001

TEORIA DOS NÚMEROS PRIMOS

97. Estudando as diversas relações que há entre os diversos números, notamos que alguns dêles se distinguem perfeitamente não só pelo seu valor numérico, mas também por certas particularidades que não são comuns a todos os números. Essas particularidades teem, na Aritmética, o nome de **propriedades dos números,** e facilitam e abreviam consideravelmente os processos dos cálculos.

98. A primeira diferença notável, que achamos entre os diversos números, é sôbre a sua divisibilidade; assim há números que podem sòmente ser divididos por si ou por 1; há outros, porém, que, além de serem divisíveis por si e por 1, podem ainda ser divididos por outros números. Daquí duas espécies de números: os números primos e os números múltiplos.

Números primos são os que não podem ser divididos exatamente senão por si mesmo ou pela unidade, como 3, 5, 7, 11, 13, etc. Estes números não podem ter outra divisão exata.

Números múltiplos são produtos de dois ou mais números diferentes da unidade e por isso podem ser divididos exatamente por êsses números. Assim 6 é o produto de 2 vezes 3, e por isso, além de ser divisível por si mesmo e por 1, como os números primos, é também divisível por 2 e por 3. O número 10 é o produto de 2 vezes 5 ou de 5 vezes 2, e por isso, além de ser divisível por 10 e por 1, é divisível também por 2 e por 5.

Quando um número divide outro exatamente, isto é, sem deixar resto, chama-se **divisor** dêsse número. Assim 4 é divisor de 12.

O número que divide dois ou mais números exatamente é **divisor comum** dêstes números. Assim 5 é divisor comum de 10, de 25 e de 40; 3 é divisor comum de 9 e de 15; etc.

99. Dois números são **primos entre si** quando não há nenhum outro número que os divida exatamente senão a unidade. Assim 8 e 9 são números primos entre si, porque não há divisor que divida exatamente estes dois números senão 1; mas nem 8, nem 9 separadamente são números primos, porque 8 é divisível por 2 e por 4; e 9 é divisível por 3.

Quando consideramos três ou mais números podem-se dar três hipóteses:

1.° Os números considerados admitem divisores comuns a todos. Assim:

24 18 36 60

podem ser todos divididos exatamente por 2, por 3 e por 6.

2.° Os números considerados não admitem divisores comuns a todos, mas alguns dêles admitem divisores comuns. Assim si considerarmos

16 20 21 28

veremos que nenhum número diferente da unidade os poderá dividir exatamente a todos; mas há divisores, como 2 e 4, que são comuns a 20, 16 e 28; há-os, como 7, que é comum a 21 e 28. Neste caso dizemos que os números dados são **primos entre si no seu conjunto.**

3.° Os números considerados, de qualquer forma que os grupemos dois a dois, não admitem fatores comuns. Assim dados os números:

9, 13, 20 e 77

de qualquer forma que tomemos dois dêles não haverá divisor comum aos dois. De fato 13 é primo com 9, com 20 e com 77; do mesmo modo 20 é primo com 13 e com 77, e assim por diante. Diz-se, por isso, que os números 9, 13, 20 e 77 são **primos entre si dois a dois.**

Como não há número algum que divida exatamente dois ou mais números primos, a não ser a unidade, segue-se que dois números primos são sempre primos entre si e três os mais números primos são sempre primos entre si dois a dois.

100. Todos os números pares, exceto o número 2, são números múltiplos; os números ímpares são os únicos que se dividem em primos e múltiplos; assim 7, 13 e 17 são números ímpares e também primos, e 9, 15 e 25 são ímpares e múltiplos. (Vêde n.° **14**). É, pois, entre os ímpares que temos de achar os números primos.

Discriminação dos números primos

101. Há dois processos para discriminar os números primos: um é o processo das **divisões sucessivas,** e o outro é o **crivo de Eratóstenes.**

Comecemos pelo processo das divisões sucessivas.

Problema. O número 157 é primo ou múltiplo?

Solução. Dividindo o número 157 sucessivamente pela série natural dos números primos 2, 3, 5, 7 e 11, notamos os dois seguintes fatos: *Primeiro*, em todas as divisões há sempre resto; isto prova que nenhum dêstes números é divisor exato de 157. *Segundo*, em todas estas divisões sucessivas o divisor é sempre menor do, que o quociente, o que mostra que podemos ensaiar nova divisão. Dividindo agora 157 por 13, que é o número primo que segue a 11, ainda achamos resto, mas já o quociente é menor do que o divisor; isto mostra que 13 também não é divisor exato, e que 157 é número primo, porque não tem divisor.

Demonstração. Em uma divisão exata, o dividendo é sempre igual ao produto do divisor multiplicado pelo quociente; por isso se fizermos uma divisão continuada, conservando constante o dividendo, e aumentando em cada operação o divisor, o quociente irá diminuindo; e quando o quociente ficar igual ou inferior ao divisor, teremos experimentado todos os divisores primos do dividendo. E se quisermos continuar a divisão, acharemos os mesmos fatores já obtidos nas divisões anteriores, mas em ordem invertida, como vemos na divisão continuada do número 45, que está ao lado.

45 ÷ 3 = 15
45 ÷ 5 = 9
45 ÷ 9 = 5
45 ÷ 15 = 3

O número 157, dividido por 13 deixa também resto, e o quociente é já inferior ao divisor. Se 157 pudesse ser divisível por 17, também o poderia ser, pelo seu quociente correspondente que, neste caso, deveria ser menor do que 13. Mas na solução do problema, vimos que 157 não tem divisor algum até 13, e se não o tem até 13, não o póde ter acima de 13, porque divisores acima de 13 correspondem a quocientes inferiores a 13. Portanto 157 é número primo.

Para reconhecer se um número é primo ou não, temos a seguinte:

Regra: *Divide-se sucessivamente o número dado pela série natural dos números primos 2, 3, 5, 7, 11, etc., até que o quociente seja menor do que o divisor, e se houver resto em todas as divisões o número será primo.*

Nota. Pelas regras da divisibilidade que exporemos no seu lugar competente, podemos saber facilmente se qualquer número é ou não divisível por cada um dos números primos desde 2 até 11, sem operar a divisão.

102. O outro processo de discriminar os números primos é o **crivo de Eratóstenes,** assim chamado por ter sido inventado por este sábio de Alexandria, que floresceu 275 anos antes de Cristo. Este processo consiste em escrever uma série de números ímpares até ao número requerido, e depois cancelar todos os números que estiverem em certos lugares determinados pela contagem.

A palavra **cancelar** significa, em Aritmética passar um traço sôbre o algarismo que foi anulado em alguma operação afim de não ter mais valor na escrita, como ~~1~~. ~~2~~. ~~3~~. ~~4~~. etc.

O crivo de Eratóstenes é ainda muito usado no ensino, porque com êle podemos formar uma grande série de números primos sem dificuldade alguma, como vamos notar no seguinte problema:

Problema. Achar todos os números primos até 53 pelo Crivo de Eratóstenes.

Solução. Como todos os números pares são múltiplos, excetuado o número 2, devemos procurar os números primos sòmente entre os números ímpares. Escrevendo, pois, todos os números ímpares até 53, que é o limite dado no problema, teremos:

1, 3, 5, 7, ~~9~~, 11, 13, ~~15~~, 17, 19, ~~21~~, 23, ~~25~~, 27, 29, 31,
~~33~~, ~~35~~, 37, ~~39~~, 41, 43, ~~45~~, 47, ~~49~~, ~~51~~, 53.

Agora passaremos a cancelar todos os números múltiplos, para ficarem na série só os números primos.

Como cada terceiro número depois de 3 é múltiplo de 3, cancelaremos todos os números que estiverem nesta ordem. Ora depois de 3, o terceiro número é 9; depois de 9, o terceiro número é 15; depois de 15, o terceiro número é 21; depois de 21, o terceiro número é 27, e assim por diante.

Como cada quinto número depois de 5 é múltiplo de 5, cancelaremos também todos os números que estiverem nestas posições. Depois de 5, o quinto número é 15, que já foi cancelado por ser também múltiplo de 3; depois de 15, o quinto número é 25, e assim por diante.

Depois prossegue-se com o número 7. O sétimo número depois de 7 é 21, que já está cancelado; o sétimo número depois de 21 é 35, que também está cancelado, e assim por diante.

Os números cancelados são números múltiplos de 3, 5 ou 7; e os números não cancelados são números primos. A estes juntaremos mais o número 2, que, por ser par, não foi escrito acima.

Portanto todos os números primos até 53 são 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, e 53.

Se a série de números excede ao quadrado de 11, cancela-se também de 11 em 11, a partir de 11 exclusive; se excede ao quadrado de 13, cancela-se de 13 em 13, a partir de 13 exclusive, etc.

Para operar conforme o crivo de Eratóstenes, temos a seguinte

Regra: *Escreve-se em linha a série de números ímpares até ao número requerido, e depois cancela-se em toda a série*

cada terceiro número depois de 3; cada quinto número depois de 5; cada sétimo número depois de 7; cada undécimo número depois de 11, e fazendo o mesmo com os outros números primos.

Os números cancelados serão números múltiplos e os não cancelados serão números primos.

Nota. Eratóstenes escrevia os números em pergaminho, e em lugar de cancelá-lo ou riscá-lo com a pena, cortava-os com um canivete, fazendo no pergaminho furos redondos semelhantes aos do crivo. Daquí lhe veio o nome de **Crivo de Eratóstenes.**

103. Damos em seguida uma tabela de todos os números primos até 1013, para exercícios de aplicação. O professor poderá tomar qualquer número primo e mandar que os discípulos verifiquem, pelo processo das divisões sucessivas, se o número é ou não primo. Poderá também mandar fazer séries de números primos por meio do crivo de Eratóstenes, e depois verificar por esta tabela se a série está exata.

Tabela de todos os números primos até 1013

2	61	149	239	347	443	563	659	773	887
3	67	151	241	349	449	569	661	787	907
5	71	157	251	353	457	571	673	797	911
7	73	163	257	359	461	577	677	809	919
11	79	167	263	367	463	587	683	811	929
13	83	173	269	373	467	593	691	821	937
17	89	179	271	379	479	599	701	823	941
19	97	181	277	383	487	601	709	827	947
23	101	191	281	389	491	607	719	829	953
29	103	193	283	397	499	613	727	839	967
31	107	197	293	401	503	617	733	853	971
37	109	199	307	409	509	619	739	857	977
41	113	211	311	419	521	631	743	859	983
43	127	223	313	421	523	641	751	863	991
47	131	227	317	431	541	643	757	877	997
53	137	229	331	433	547	647	761	881	1009
59	139	233	337	439	557	653	769	883	1013

Nota. Desde 1 até 100.000 há sòmente 9593 números primos, e excetuando 2 e 5, todos os mais terminam em 1, 3, 7 ou 9.

Achar todos os fatores primos de um número

Fatores de um número são aqueles números que, multiplicados entre si, produzem êsse número. Assim.

os fatores de 15 são 3 e 5, porque 3×5 são 15;
os fatores de 21 são 3 e 7, porque 3×7 são 21;
os fatores de 35 são 5 e 7, porque 5×7 são 35.

104. Os fatores de um número são números primos ou são números múltiplos; se são primos, chamam-se **fatores primos**; se são múltiplos, chamam-se **fatores múltiplos.** O número 12 tem os seguintes fatores: 2, 3, 4 e 6; os números 2 e 3 são fatores primos, e 4 e 6 são fatores múltiplos.

105. Os números múltiplos formam-se do produto de todos os seus fatores primos que são $2 \times 2 \times 5 = 20$; o número 24 forma-se de quatro fatores primos que são $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$, etc.

106. Fatorar um número é decompô-lo em seus fatores primos, isto é, dividi-lo por todos os seus fatores primos até o quociente dar 1.

Problema. Decompôr o número 420 em todos os seus fatores primos.

Solução. Devemos começar êste processo dividindo o número dado pelo menor número primo que o dividir exatamente, e só passar para um número primo maior, quando êle não fôr divisor exato. Então 420 dividido por 2, o quociente é 210; 210 dividido por 2, o quociente é 105; 105 dividido por 3, o quociente é 35; 35 dividido por 5, o quociente é 7, e 7 dividido por 7, o quociente é 1. Os fatores primos de 420 são 2, 2, 3, 5 e 7. Prova $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$.

Processo

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

Para achar os fatores primos, temos a seguinte

Regra: *Divide-se o número dado pelo menor número primo que o divida exatamente; divide-se o quociente pelo mesmo número primo ou por outro maior que também o divida exatamente; e assim se continua até o quociente ficar 1.*

Os vários divisores empregados serão os fatores primos do número dado.

Achar os fatores primos dos seguintes números:

	Número	Fatores
1.	14	2 e 7.
2.	15	3 e 5.
3.	18	2, 3 e 3.
4.	22	2 e 11.
5.	66	2, 3 e 11.
6.	216.	2, 2, 2, 3, 3 e 3.
7.	330.	?
8.	399.	?
9.	450	?
10.	1845.	?

Divisão por meio de cancelamento

107. Divisão por cancelamento é o modo abreviado de operar uma divisão, rejeitados os fatores comuns ao dividendo ao divisor.

Ilustração. Como já vimos no número 81, quando se divide o dividendo e o divisor por um mesmo número, não se altera o valor do quociente; então decompondo-se o dividendo e o divisor em seus fatores primos, e havendo fatores comuns a ambos, cancelam-se estes fatores, e a divisão ficará logo operada.

108. Para facilitar o cancelamento, escreveremos a divisão em forma de uma fração, pondo o dividendo em cima, e o divisor debaixo, como $\frac{42}{7}$ que se lê: *42 dividido por 7*.

Problema. Qual é o quociente de 42 dividido por 7?

Solução. O número 42 decompõe-se em 7 vezes 6 ou 6 vezes 7; e como o fator 7 é comum a ambos os termos, cancela-se este fator no dividendo e no divisor, e o quociente fica 6.

Fatores

$$\frac{42}{7} = \frac{6 \times 7}{7} = 6$$

109. Quando um fator do dividendo e outro do divisor forem exatamente divisíveis por um mesmo número, dividem-se ambos por êsse número, cancelam-se, e escrevem-se os quocientes nos seus respectivos lugares.

Problema. Multiplicar 45 por 6, e dividir o produto por 9 multiplicado por 3.

Solução. Podemos dividir 45 e 9 por 9. Então $45 \div 9 = 5$ e $9 \div 9 = 1$. Cancelam-se os dois números e escrevem-se os quocientes 5 e 1 nos seus respectivos lugares. Podemos também cancelar 6 e 3 dividindo-os por 3. O resultado dos dois fatores do dividendo é $5 \times 2 = 10$, e o resultado do divisor é $1 \times 1 = 1$, o quociente é $\frac{10}{1}$ ou 10.

$$\frac{45 \times 6}{9 \times 3} = \frac{\overset{5}{\cancel{45}} \times \overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{9}} \times \underset{1}{\cancel{3}}} = 10.$$

Problema. Quantos livros custando 40 cruzeiros cada um devemos dar por 5 relógios de 160 cruzeiros cada um?

Solução. 5 relógios a 160 cruzeiros importam em 5 vezes 160 cruzeiros, e um livro custa 40 cruzeiros. Dividindo 5 vezes 160 por 40, acharemos o número dos livros. Cancela-se primeiro a cifra debaixo e a cifra de cima, que é o mesmo que dividir os dois números por 10, e então ficarão reduzidos a 16 e 4. Cancelam-se ainda estes números, dividindo-os por 4, e o resultado será $5 \times 4 = 20$ livros.

$$\frac{5 \times \overset{4}{\cancel{160}}}{\underset{1}{\cancel{40}}} = 20.$$

Prova. 5 relógios a 160 = 800.
20 livros a 40 = 800.

Regra: *Para se operar uma divisão por cancelamento, escreve-se o divisor debaixo do dividendo, cancelam-se os fatores comuns a ambos os termos ou dividem-se por um mesmo número, e o resultado do dividendo dividido pelo do divisor será o quociente.*

Nota. Este método tem muita aplicação na regra de três e em outros processos aritméticos, e por isso é muito necessário que os dicípulos se familiarizem com êle.

1. Multiplicar 36 por 4, e dividir o produto por 9. **Resp. 16.**
2. Achar o valor $(24 \times 6) \div (12 \times 3)$. **Resp. 4.**
3. Achar o valor $\frac{40 \times 9}{8 \times 5 \times 3}$. **Resp. 3.**
4. Em 37 vezes 15 quantas vezes ha 5? **Resp. 111.**
5. Multiplicar $21 \times 11 \times 26$ e dividir o produto pelo resultado de $13 \times 7 \times 2$. **Resp. 33.**
6. Quantas sacas de café, pesando cada uma 60 quilos, podemos dar por 50 sacas, pesando cada uma 42 quilos? **Resp. 35.**
7. Os fatores do dividendo são 16, 4, 9 e 5; e os fatores do divisor são 8, 9 e 10; qual é o quociente? **Resp. 4.**
8. Um fazendeiro comprou 41 porcos a 11 cruzeiros, e fez o pagamento em cavalos ao preço de 41 cruzeiros cada um; quantos cavalos devia dar para pagar os porcos? **Resp. 11.**
9. Perguntando-se a uma moça qual era a sua idade, ela respondeu: Se dividirdes o produto de 64 multiplicado por 14 pelo produto de 8 multiplicado por 4, tereis a minha idade. **Resp. 28 anos.**
10. Dividir o produto continuado $35 \times 28 \times 23$ pelo produto $28 \times 7 \times 5$. **Resp. 23.**

DIVISIBILIDADE

110. Já vimos que quando um número divide outro exatamente, isto é, sem deixar resto, chama-se **divisor** dêsse outro.

O divisor de um número chama-se também **fator, submúltiplo e parte aliquota** dêsse número; de sorte que 2, 3, 4 e 6 são divisores, fatores, submúltiplos e partes alíquotas de 12, porque cada um dêstes números divide exatamente o número 12.

Ilustração. Se considerarmos 12 como um produto, então os números 2, 3, 4 e 6 serão fatores; se o considerarmos como um dividendo, serão divisores exatos; se o considerarmos como um múltiplo, serão submúltiplos, finalmente se considerarmos as partes exatas em que 12 pode ser dividido, 2, 3, 4 e 6 serão partes alíquotas de 12, porque 2 é um sexto, 3 é um quarto, 4 é um terço, e 6 é um meio de 12.

111. Os números que se prestam a uma divisão exata, são só os números múltiplos, porque estes, contendo outros números menores uma quantidade exata de vezes, podem ser divididos por êles sem deixar resto.

Ilustração. O número 14 contém 2 vezes o número 7 ou 7 vezes o número 2, e por isso pode ser dividido exatamente por 2 ou por 7; o número 16 contém duas vezes o número 8, 4 vezes o número 4 ou 8 vezes o número 2, e por isso pode ser dividido exatamente por 2, por 4 e por 8. Um número primo, a não ser por si mesmo ou por 1, não é divisível por nenhum outro número.

Teoremas sôbre a divisibilidade

112. Antes de apresentarmos os diversos caracteres da divisibilidade, vamos demonstrar alguns teoremas que servem de base para a teoria da divisão exata.

1.° **Teorema.** *Se um número divide as parcelas de uma soma, divide também a mesma soma.*

Demonstração. O número 6 divide 12 e 18; divide também a soma dêstes números que é 12+18=30. Com efeito o número 12 contém 2 vezes 6, e o número 18 contém 3 vezes. Ora, somados os dois números, temos aí 2 + 3 = 5 vezes o número 6. Portanto a soma de 12 e 18, contendo 5 vezes axatas o número 6, é divisível por 6.

12 contém 2 vezes 6
18 contém 3 vezes 6
―――――――――――
30 contém 5 vezes 6

Daquí podemos tirar a seguinte dedução: *Se um número divide a soma e uma das parcelas, divide também a outra.*

2.° **Teorema.** *Se um número divide outro, divide também todos os múltiplos dêste outro.*

Demonstração. O número 3 divide 12, logo também dividirá 60 que é multiplo de 12. Com efeito, 60 é igual a 5 vezes 12 ou uma soma de 5 parcelas iguais a 12. Como 3 divide cada uma das parcelas dessa soma, também dividirá a soma.

3.° **Teorema.** *Se um número divide exatamente dois números, divide também a sua diferença.*

Demonstração. Se 4 divide 32 e 24, divide também a sua diferença que é 32—24=8. Porque 32 contém 8 vezes 4, e 24 contém 6 vezes 4; ora de 8 vezes subtraindo 6 vezes, restam 2 vezes 4 que são 8. Sendo 8 múltiplo de 4, é divisível por 4.

32 contém 8 vezes 4
24 contém 6 vezes 4
―――――――――――
8 contém 2 vezes 4

4.° **Teorema.** *Se um número primo divide um produto de dois fatores, divide pelo menos um dêsses fatores.*

Demonstração. O produto de 5 vezes 6 é 30; qualquer número primo, portanto, que divi- dir 30, dividirá pelo menos um dos fatores 5 ou 6.

$5 \times 6 = 30$
$(5 \times 2 \times 3) = (2 \times 3 \times 5)$

Um produto contém todos os fatores primos dos dois números que o formaram; assim 30 contém todos os fatores de 5 e 6. Se o divisor fôr 2, temos 2 no produto, 2 em um dos fatores; se fôr 3, temos 3 no produto e 3 no mesmo fator; se fôr 5, temos 5 no produto, e 5 no outro fator. Ora, como todo o número se divide por qualquer fator que entra na sua composição, segue-se que o número primo que dividir um produto, dividirá pelo menos um dêsses fatores.

5.° **Teorema.** *Se um número divide o dividendo e o divisor, divide também o resto da divisão, se o houver.*

Demonstração. Se 5 divide 75 e 20, divide tam- bém 15 que é o resto da divisão de 75 por 20. Ora se 5 divide 20 divide também 60 que é o múltiplo de 20; e se divide 60 e 75 divide também a diferença que há entre estes dois números, que é 15, conforme foi demonstrado no 3.° teorema.

```
75 | 20
60   3
--
15
```

6.° **Teorema.** *Se um número é divisível por dois ou mais números primos entre si dois a dois também é divisível pelo produto dêles.*

Demonstração. O número 30 é divisível pelos números primos 2, 3 e 5. Se 30 é divisível por 2 e por 3, é porque contém 2 vezes 3 ou 3 vezes 2 e em ambos os casos é divisível por $2 \times 3 = 6$. Se 30 é divisível por 6 e por 5, que são números primos entre si, é porque contém 5 vezes 6 ou 6 vezes 5, e por isso é também divisível por $5 \times 6 = 30$. Portanto 30 é di- visível por $2 \times 5 = 10$, por $3 \times 5 = 15$ e por $2 \times 3 \times 5 = 30$.

Caracteres da divisibilidade dos números

113. Os caracteres da divisibilidade são condições que nos habilitam a conhecer se um número qualquer é ou não divisível por outro sem operarmos a divisão.

Esses caracteres são os seguintes:

Por 2

Todo número par é divisível por 2.

Demonstração. Os números pares terminam em 2, 4, 6, 8, ou 0. Ora todos os números terminados nestes algarismos são multiplos de 2, e por isso são divisíveis por 2. (2.° Teorema). Os números ímpares terminam em 1, 3, 5, 7 ou 9, e estes divididos por 2 deixam sempre resto.

Por 3

7.º Todo número cujos algarismos tenham uma soma divisível por 3 será também divisível por 3.

Demonstração. Todo número formado por um algarismo significativo seguido de zéros é múltiplo de 3 mais o valor absoluto dêsse algarismo. Assim

10, 100, 1000, etc. são múltiplos de 3 e mais 1;
20, 200, 2000, etc. são múltiplos de 3 e mais 2;
30, 300, 3000, etc. são múltiplos de 3 e mais 3, e assim por diante.

Decompondo agora o número 3216 nas suas diversas ordens de unidades, temos:

3000 que é múltiplo de 3 e mais	3;
200 que é múltiplo de 3 e mais	2;
10 que é múltiplo de 3 e mais	1;
6	6,
3216	12

Vemos, pois, que o número 3216 é múltiplo de 3 mais 12, que é a soma dos excedentes dos múltiplos. Sendo 12 divisível por 3, o número 3216 também o será. Portanto, se a soma dos algarismos de um número fôr divisível por 3, o número também o será.

Por 4

8.º Todo número cujos dois últimos algarismos da direita formarem um número divisível por 4, será também divisível por 4.

Demonstração. O número 328 compõe-se de 300 + 28. Ora, 4 divide 100, sem deixar resto; e se divide 100, divide também 200, 300, etc., que são múltiplos de 100. (2.º Teorema). Portanto 4, dividindo o número formado pelos dois últimos algarismos, que é 28, divide o número inteiro, que é 328.

Por 5

9.º Todo número que terminar em 5 ou 0, será divisível por 5.

Demonstração. Os números terminados em 5 ou 0 são todos múltiplos de 5, como 10, 15, 20, 25, 30, etc.

Por 6

10.º Todo número que fôr divisível por 2 e por 3, será também divisível por 6.

Demonstração. No 6.º teorema vimos que, se um número é divisível por dois outros primos entre si, também o é pelo produto dêles. Ora 2 e 3 são números primos entre si, e se um número é divisível por estes dois números, também é pelo seu produto $2 \times 3 = 6$.

Por 8

11.ª *Todo número cujos três algarismos da direita formarem um número divisível por 8, será também divisível por 8.*

O número 4296 é divisível por 8, porque 296 é divisível por 8.

Demonstração. 8 divide 1000 sem deixar resto, e se divide 1000, divide também 2000, 3000, 4000 que são múltiplos de 1000. Ora, 8 dividindo o número formado pelos três últimos algarismos do número divide o número inteiro.

Por 9

12.ª *Todo número cujos algarismos tenham uma soma divisível por 9 será também divisível por 9.*

Ilustração. O número 4356 é divisível por 9, porque a soma dos seus algarismos, que é 4+3+5+6=18, é também divisível por 9.

Demonstração. Um algarismo significativo seguido de uma só ou mais cifras, é múltiplo de 9 mais êsse algarismo. Assim

10 contém 1 vez 9 e mais 1.
20 contém 2 vezes 9 e mais 2;
30 contém 3 vezes 9 e mais 3;
40 contém 4 vezes 9 e mais 4;
44 contém 4 vezes 9 e mais 4 e mais 4.

De sorte que todo número é um múltiplo de 9, e mais, ainda, a soma dos seus algarismos. Decompondo o número 4356, achamos, que

4000 é múltiplo de 9, sobrando 4;
300 é múltiplo de 9, sobrando 3;
50 é múltiplo de 9, sobrando 5;
6 .... 6.
——— ———
4356 18

O número 4356 é multiplo de 9 tendo ainda a sobra da soma dos seus algarismos, que é 4+3+5+6=18. Se a soma dos algarismos fôr divisível por 9, o número também será; se deixar 2, 3, 4, etc., de resto, o número também deixará. Ora, 18 é divisível por 9, e por isso 4356 também é. Sendo um número divisível por 9, também é por 3, porque 9 é múltiplo de 3.

Por 10

13.ª *Todo número terminado em zéro é divisível por 10.*

Demonstração. Os números terminados em zéro são só 10 ou múltiplos de 10, como 60, 80, 100, 240, etc.

Por 11

14.ª *Um número é divisível por 11, quando a soma dos algarismos da ordem par fôr igual à soma dos algarismos da ordem impar ou quando a diferença fôr 11 ou múltiplo de 11.*

Ilustração. Começando pela direita de um número, o primeiro algarismo pertence à ordem impar, o segundo à ordem par, o terceiro

à ordem ímpar, o quarto à ordem par, e assim por diante. No número 48642, a soma dos algarismos da ordem par é 4+8=12, e a soma dos da ordem ímpar é 2+6+4=12, e como as somas são iguais, o número é divisível por 11.

Demonstração. Todo número formado de um algarismo significativo seguido de zeros é multiplo de 11 mais ou menos êsse algarismo significativo, conforme o número de zeros fôr par ou impar. Assim, o número 48642 se decompõe em

40000	que é múltiplo de	11 + 4.
8000	que é múltiplo de	11 — 8;
600	que é múltiplo de	11 + 6;
40	que é múltiplo de	11 — 4;
2	....	+ 2;

O número 48642 é múltiplo de 11 mais (4 + 6 + 2) — (8 + 4) ou múltiplo de 11 mais (12—12), ou simplesmente múltiplo de 11.

Dividindo-se pois 48642 por 11, não haverá resto, porque a soma dos algarismos da ordem par é igual à soma dos da ordem ímpar. A diferença que houver entre as duas somas será o resto que o número ha de deixar, se não fôr divisível por 11.

Por 12

15.° *Todo número divisivel por 3 e por 4, será também divisivel por 12.*

Ilustração. O número 636 é divisível por 3 e por 4, e por isso também é divisível por 12.

Demonstração. Conforme o 6.° teorema, se um número é divisível por dois números primos entre si, também é pelo seu produto. Ora 3 e 4 são números primos entre si, e, se 636 é divisível por 3 e por 4, também é pelo seu produto 3×4=12.

114. Com demonstração semelhante podemos tirar as seguintes deduções:

1ª Se um número é divisivel por **2** *e por* **7**, *também é por* **14.**
2ª Se um número é divisivel por **3** *e por* **5**, *também é por* **15.**
3ª Se um número é divisivel por **3** *e por* **7**, *também é por* **21.**
4ª Se um número é divisivel por **4** *e por* **5**, *também é por* **20.**

E assim com todos os casos semelhantes.

Achar por meio dos caracteres da divisibilidade estudados acima os diversos divisores de

		Divisores
1.	138.	2, 3 e 6.
2.	483.	3, 7 e 21.
3.	645.	3, 5 e 15.
4.	84.	2, 3, 4, 6, 7, 12, 21, 28 e 42.
5.	90.	2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 30 e 45.

6. 720. 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 20, 30, etc.
7. 3465. ?
8. 7224. ?
9. 3311. ?
10. 3003. ?
11. Formar um número divisível por 2 e por 3. ?
12. Formar um número divisível por 5 e por 9. ?
13. Escrever um número divisível por 3, por 4 e por 7. ?
14. Escrever um número que, dividido por 11, deixe 1 de resto. ?

Achar todos os divisores de um número

115. Vamos achar agora todos os divisores de um número por meio dos seus fatores primos.

Este ponto divide-se em duas partes que precisamos distinguir: a primeira é calcular o número exato de divisores de um número; a segunda é achar todos êsses divisores.

116. Primeira parte. Calcular o número de divisores.

Problema. Quantos divisores tem o número 504?

Solução. Fatorando o número 504, conforme aprendemos no número **106**, temos os seguintes fatores primos: 2, 2, 2, 3, 3 e 7. Notamos aquí que o número 2 entra *três vezes* como fator; o número 3 entra duas vezes como fator, e 7 entra uma vez.

Se juntarmos a cada um dêstes números de vezes uma unidade, teremos 3+1, 2+1 e 1+1, ou 4, 3 e 2. Multiplicando entre sí estes números, temos 4×3×2=24, que é o número dos divisores; 540 tem, portanto, 24 divisores.

Processo

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

Para calcular a quantidade de divisores que tem um número, formulamos a seguinte

Regra: *Decompõe-se o número em todos os seus fatores primos; nota-se o número de vezes que cada um deles entra como fator; acrescenta-se a cada número de vezes uma unidade, e os números assim acrescentados, multiplicados entre sí, dão o número total de divisores requerido.*

Achar o número de divisores dos seguintes números:

1.	90	Resp. 12.	**5.**	124	Resp. ?
2.	96	» 12.	**6.**	150	» ?
3.	120	» 16.	**7.**	168	» ?
4.	320	» 14.	**8.**	280	» ?

117. Segunda parte. Achar todos os divisores de um número.

Problema. Achar todos os divisores de 540.

Solução. O modo prático de resolver êste problema é o seguinte:

540	2				
270	2	**1**	**2**	**4**	(1ª linha)
135	3	3,	6,	12,	(2ª linha)
45	3	9,	18,	36,	(3ª linha)
15	3	27,	54,	108,	(4ª linha)
5	5	5,	10,	20,	(5ª linha)
1		15,	30,	60,	(6ª linha)
		45,	90,	180,	(7ª linha)
		135,	270,	540,	(8ª linha)

Exposição dêste processo. Decompondo o número 540 em seus fatores primos, temos 2, 2, 3, 3, 3 e 5. Por estes fatores, já podemos calcular que o número 540 tem 24 divisores.

Escreve-se na 1.ª linha horizontal a unidade e o primeiro fator, e mais a sua segunda potencia, visto entrar duas vezes na composição do número. Ora o primeiro fator é 2, e como êle entra duas vezes na composição do número temos **1, 2** e mais a sua segunda potência ou quadrado, que é $2 \times 2 = 4$.

Agora, multiplicando o primeiro fator 3 por cada um dos números da 1.ª linha temos a 2.ª linha; multiplicando o segundo fator 3 pela 2.ª linha, temos a 3.ª linha; multiplicando o terceiro fator 3 pela 3.ª linha, temos a 4.ª linha.

Multiplicando depois o fator 5 sucessivamente por cada uma das linhas já formadas, temos as últimas quatro linhas que completam os 24 divisores de 540, ou os únicos 12 pares de divisores em que êste número se pode decompôr. Esses doze pares são os seguintes:

$540 \div 1 = 540$	$540 \div 5 = 108$	$540 \div 12 = 45$
$540 \div 2 = 270$	$540 \div 6 = 90$	$540 \div 15 = 36$
$540 \div 3 = 180$	$540 \div 9 = 60$	$540 \div 18 = 30$
$540 \div 4 = 135$	$540 \div 10 = 54$	$540 \div 20 = 27$

O número 540 não póde ter, portanto, nenhum outro divisor, porque se continuássemos a divisão por 27, 30, 36, etc., os quocientes respectivos seriam 20, 18, 15, etc., isto é, os mesmos divisores em posição invertida.

Para achar todos os divisores de um número, temos a seguinte

Regra: *Decompõe-se o número em seus fatores primos; escrevem-se em linha horizontal 1 e o primeiro fator, e mais a sua segunda potência, se êste fator entrar duas vezes na composição do número, e mais a sua terceira pôtencia, se entrar três vezes, etc.*

Multiplicam-se todos os demais fatores sucessivamente pelos números desta linha, e por cada linha que se fôr formando, e os diversos produtos serão os divisores do número dado.

Nota. Quando um número é quadrado perfeito como 36, 64, 100, etc., tem um número impar de fatores; assim 36 se decompõe em 36×1, 2×18, 3×12, 4×9 ou 6×6. Ora o último fator embora múltiplicado por si mesmo é um só fator, e por isso 36 tem 4 pares e meio de fatores ou 9 fatores.

Como exercício de aplicação, o discípulo deve achar os divisores dos números dados para exercício na Seção 116.

MÁXIMO DIVISOR COMUM

118. Divisor comum é o número que divide dois ou mais números diversos sem deixar resto.

119. Máximo divisor comum é o maior número que divide dois ou mais números diversos sem deixar resto.

Ilustração. Dois ou mais números podem ter muitos divisores comuns; assim 16 e 24 teem os seguintes divisores: 2, 4 e 8. Cada um dêstes divisores divide exatamente os números 16 e 24. Ora 2 e 4 são divisores comuns inferiores, e 8 é o seu máximo divisor comum, porque não há outro número maior do que êle, que possa dividir 16 e 24 sem deixar resto.

120. Antes de entrarmos na exposição dêste ponto importante, devemos recordar os seguintes princípios já demonstrados nos teoremas precedentes:

1° *O divisor de um número é também divisor de todos os seus múltiplos.*

2° *O divisor comum de dois números é também divisor da soma e diferença dêsses números.*

3.° *O produto continuado de todos os fatores primos, comuns a dois ou mais números, é o* **máximo divisor comum** *dêsses números.*

121. Há dois processos diferentes para achar o máximo divisor comum: um é o processo da decomposição, e o outro é o processo da divisão.

O **processo da decomposição** consiste em decompôr os números dados em seus fatores primos, e depois achar o produto continuado de todos os fatores comuns a êsses números.

Nota. Por abreviatura, usaremos das iniciais **m. d. c.** para significar máximo divisor comum.

I Problema. Qual é o **m. d. c.** de 72 e 84?

Solução. Decompondo os números 72 e 84 em seus fatores primos, conforme aprendemos no número 106, vemos que o número 2 entra duas vezes como fator em ambos os números, e que o número 3 entra uma só vez.

Estes fatores estão marcados com um ponto para se distinguirem dos que não são comuns.

Os fatores pontuados 2, 2 e 3 são comuns aos dois números, e o produto continuado dêstes fatores, $2 \times 2 \times 3 = 12$, é *o máximo divisor comum* dêsses números.

Processo

$$72 = \dot{2} \times \dot{2} \times 2 \times \dot{3} \times 3$$

$$84 = \dot{2} \times \dot{2} \times \dot{3} \times 7$$

Divisores comuns 2, 2 e 3

M. d. c. $2 \times 2 \times 3 = 12$

II Problema. Qual é o **m. d. c.** de 126, 210 e 546?

Solução. Decompondo os números 126, 210 e 546 em seus fatores primos, vemos que os fatores 2, 3 e 7 são comuns aos três números dados, e o seu máximo divisor comum é $2 \times 3 \times 7 = 42$.

Processo

$$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$$

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$546 = 2 \times 3 \times 7 \times 13$$

Divisores comus 2, 3 e 7

M. d. c. $2 \times 3 \times 7 = 42$

Para achar o **m. d. c.** de dois ou mais números, temos a seguinte

Regra: *Decompõe-se cada um dos números dados em seus fatores primos; depois multiplicam-se entre si todos os fatores comuns, e o produto será o máximo divisor comum.*

Nota. Se os números dados não tiverem nenhum fator comum diferente da unidade, como 63 e 100, são primos entre si, e não poderão ser divididos pelo mesmo número.

$$63 = 3 \times 3 \times 7$$

$$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$$

Achar o máximo divisor comum:

		Respostas
1.	De 30 e 42.	$2 \times 3 = 6.$
2.	De 42 e 70.	$2 \times 7 = 14.$
3.	De 63 e 105.	$3 \times 7 = 21.$
4.	De 90 e 150.	$2 \times 3 \times 5 = 30.$
5.	De 90 e 225.	$3 \times 3 \times 5 = 45.$
6.	De 30, 45 e 75	$3 \times 5 = 15.$
7.	De 84, 126 e 210.	$2 \times 3 \times 7 = 42.$
8.	De 16, 40, 88 e 96.	$2 \times 2 \times 2 = 8.$
9.	De 112, 140 e 168.	?
10.	De 84, 36 e 60.	?

122. O processo da divisão para achar o **m. d. c.** consiste em uma série de divisões até se achar um divisor exato.

Problema. Qual é o máximo divisor comum de 44 e 16?

Solução. Divide-se o número maior pelo menor (44 por 16), e o quociente é 2, e o resto é 12. Divide-se depois o número menor pelo primeiro resto (16 por 12), e o quociente é 1, e o resto é 4. Divide-se ainda o primeiro resto pelo segundo resto (12 por 4) e o quociente é 3, e não ha mais resto. O divisor que não deixar resto, será o m. d. c. Logo é 4.

44 | 16
32 | 2
—
12

16 | 12
12 | 1
—
4

12 | 4
12 | 3
—
0

Na prática usa-se a disposição seguinte escrevem-se os quocientes em cima dos divisores, e os restos debaixo para ficar cada especie de termos em linha horizontal, como se vê no modelo que está á margem.

	2	1	3	Quociente
44	16	12	4	Divisores
12	4	0		Restos

Demonstração. Vamos demonstrar agora os dois seguintes pontos: **Primeiro,** que 4 é divisor comum de 44 e 16. **Segundo,** que 4 é o máximo divisor comum de 44 e 16.

Primeiro ponto. O número 4 é divisor comum de 44 e 16, porque na terceira divisão que fizemos acima, vimos que 4 está contido três vezes exatas em 12, e por isso divide 12; ora se 4 divide 12 e divide a si mesmo, divide também a soma de $12+4=16$ que é o número menor. (2.° *Princípio*). Pela mesma razão, se 4 divide 16, divide também 32, que é múltiplo de 16 (1.° *Princípio*); e se divide 32 e 12, divide a soma dêstes números $32+12=44$ que é o número maior. Portanto 4 dividindo 44 e 16, é divisor comum dêstes números.

Segundo ponto. O número 4 é o máximo divisor comum de 44 e 16, com efeito. Se um número maior do que 4, dividisse 44 e 16, deveria dividir também a diferença entre estes números, que é $44-16=28$. (2.° *Princípio*). Como 4 divide 12, divide também 24 que é múltiplo de 12; e se divide 28 e 24 dividiria também a diferença entre estes números, que é $28-24=4$; ora isto é impossível, porque um número maior do que 4 não póde dividir 4 exatamente. Portanto, o m. d. c. de 44 e 16 é 4, porque 4 divide os dois números dados e nenhum número maior de que 4 os póde dividir ao mesmo tempo.

Para achar o **m. d. c.** pela divisão, temos a seguinte

Regra: *Divide-se o número maior pelo menor, em seguida divide-se o primeiro divisor pelo primeiro resto, e o segundo divisor pelo segundo resto, e assim por diante até a divisão não deixar resto; o divisor que não deixar resto, será o* **m. d. c.**

Notas. 1.ª Se na primeira divisão não houver resto, o número menor será o m. d. c., porque divide o número maior e divide também a si mesmo.

2.ª Quando em todas as divisões efectuadas houver resto, os números dados serão primos entre si, porque não teem divisor comum senão a unidade.

3.ª Quando forem dados três ou mais números, acha-se o m. d. c. do dois dêles, e depois se acha o m. d. c. dêste número achado, e do terceiro e assim por diante.

Achar o máximo divisor comum dos seguintes números:

1. 42 e 54.	Resp. 6	**6.** 66 e 154.	Resp. ?
2. 70 e 110.	" 10	**7.** 154 e 280.	" ?
3. 105 e 165.	" 15	**8.** 231 e 273.	" ?
4. 90 e 150.	" 30	**9.** 247 e 323.	" ?
5. 140 e 210.	" 70	**10.** 285 e 465.	" ?

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

123. Quando tratámos da divisibilidade dos números, considerámos os números múltiplos como divisíveis por dois ou mais fatores diferentes, para distingui-los dos números primos que só se dividem por si ou pela unidade. Agora vamos tratar dos múltiplos com referência aos seus submúltiplos de que são formados.

124. Múltiplos de um número são o duplo, triplo, quádruplo, quíntuplo, etc. dêsse número.

Para obtermos o duplo de um número qualquer, basta somá-lo 2 vezes; para obtermos o seu tríplo, basta somá-lo 3 vezes, e assim por diante; de sorte que o duplo de 6 é $6 + 6 = 12$; o tríplo é $6 + 6 + 6. = 18$; o quádruplo é $6 + 6 + 6 + 6 = 24$, etc. Podemos obter o mesmo resultado por meio da multiplicação; assim o dúplo de 6 é $6 \times 2 = 12$; o tríplo é $6 \times 3 = 18$; o quádruplo é $6 \times 4 = 24$. Vemos, pois, que neste caso 12, 18 e 24 são múltiplos de 6, e o número 6 é submúltiplo de 12, 18 e 24.

125. Cada número tem uma quantidade ilimitada de múltiplos. Assim os múltiplos

de 2 são	4,	6,	8,	10,	12,	14,	16,	18,	20, etc.
de 3 são	6,	9,	12,	15,	18,	21,	24,	27,	30, etc.
de 4 são	8,	12,	16,	20,	24,	28,	32,	36,	40, etc.
de 5 são	10,	15,	20,	25,	30,	35,	40,	45,	50, etc.

126. Quando um número é múltiplo de dois ou mais números, chama-se **múltiplo comum** dêsses números. Assim 12 é múltiplo comum de 6, 4, 3 e 2, porque é o duplo de 6, o tríplo de 4, o quádruplo de 3 e o sêxtuplo de 2.

Dois ou mais números teem muitos múltiplos comuns, mas o mais importante, isto é, o que é muito necessário em algumas operações da Aritmética é o menor de todos, chamado *mínimo multiplo comum*.

127. Mínimo múltiplo comum de dois ou mais números, é o menor número que se divide pelos números dados sem deixar

resto. Assim 24 é o mínimo múltiplo comum de 8, 6 e 4, porque não há outro número menor que se divida exatamente por estes três números.

Nota. Por abreviatura, usaremos das iniciais **m. m. c.** para indicar mínimo múltiplo comum.

128. Antes de estudarmos os diversos métodos de achar o **m. m. c.**, precisamos conhecer os seguintes princípios:

1º Um múltiplo que é comum a dois ou mais números deve conter pelo menos todos os fatores primos que entram em cada um dêles.

Ilustração. Os fatores de 15 são 3 e 5, e os fatores de 21 são 3 e 7. Qualquer múltiplo comum de 15 e 21 deve conter os fatores 3, 5 e 7, porque se não tiver os fatores 3 e 5, não será múltiplo de 15; e se não tiver os fatores 3 e 7, não será múltiplo de 21.

Qualquer múltiplo comum de 15 e 21 póde ter outros fatores, além de 3, 5 e 7, mas não poderá deixar de ter estes, porque se não tiver o fator 5, não se dividirá por 15; se não tiver o fator 7, não se dividirá por 21, e se não tiver o fator 3, não se dividirá, nem por 15, nem por 21.

2º O mínimo múltiplo comum de dois ou mais números deve conter todos os fatores primos que entram na composição de cada um dêsses números, e não ter nenhum outro fator.

Ilustração. Decompondo os números 18 e 24 em seus fatores primos temos:

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$
$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3.$$

Ora qualquer múltiplo comum de 18 e 24 deve conter os fatores 2, 2, 2, 3 e 3, podendo ter ainda outros, mas o mínimo múltiplo comum não deve ter nenhum outro fator além dêstes, porque, se tiver, não será o **m. m. c.** de 18 e 24.

O modo prático de determinar quais são os fatores primos que formam o **m. m. c.**, é o seguinte: Procura-se o número em que um fator primo entra o maior número de vezes; toma-se êsse fator sòmente êsse número de vezes, e rejeita-se em todos os outros números em que êle aparecer. Assim em 24 o fator 2 entra 3 vezes, toma-se por isso três vezes como fator (2×2×2), e rejeita-se em 18. Em 18, toma-se o fator 3 duas vezes (3×3) e rejeita-se em 24.

129. Há dois processos diferentes por meio dos quais podemos achar o **m. m. c.** O *primeiro* é fatorar os números dados, e depois separar e multiplicar entre si os fatores que formam o **m. m. c.** O *segundo* é dividir os números dados por divisores comuns, e achar o produto de todos êsses divisores.

130. Primeiro processo. Problema. Qual é o mínimo múltiplo comum de 18, 21 e 66?

Solução. Decompondo os números 18, 21 e 66 em seus fatores primos, temos o resultado que está à margem. Como o mínimo múltiplo comum deve conter todos os fatores primos dos números dados, segue-se que êle deve conter os fatores de 66, que é o número maior. Estes fatores são $2 \times 3 \times 11$, e ficam já separados para lhes irmos juntando os fatores dos outros números que não estiverem contido neles.

Processo

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$
$$21 = 3 \times 7$$
$$66 = 2 \times 3 \times 11$$

O mínimo múltiplo comum é

$$2 \times 3 \times 11 \times 7 \times 3 = 1386$$

O **m. m. c.** deve conter também os fatores de 21, que são 3 e 7; ora, o fator 3 estando já contido nos fatores de 66, rejeita-se; e o fator 7, como ainda não está contido, acrescenta-se àqueles fatores e temos já $2 \times 3 \times 11 \times 7$.

O **m. m. c.** deve conter ainda os fatores de 18, que são $2 \times 3 \times 3$; ora, como o fator 2 já está contido nos fatores separados, rejeita-se; o fator 3, como entra duas vezes em 18, e está contido uma só vez nos fatores separados, acrescenta-se alí mais uma vez, e todos os fatores separados serão 2, 3, 11, 7 e 3.

Multiplicando entre si estes fatores, temos $2 \times 3 \times 11 \times 7 \times 3 =$ $= 1386$ que é o **m. m. c.** de 18, 21 e 66.

Nota explicativa. Quando dissemos acima que o **m. m. c.** deve conter todos os fatores primos dos números dados, não se deve entender *todos* no sentido numeral de 8 fatores que teem os três números dados, porque se assim fosse, teríamos um múltiplo comum dêsses números, mas não seria o mínimo. Deve-se entender que cada um dos fatores dos números dados está contido nos fatores do **m. m. c.**; e isso é evidente. Os fatores primos de 18 são 2, 3 e 3; alí encontramos também os fatores primos 2, 3 e 3. Os fatores de 21 são 3 e 7; alí encontramos também os fatores 3 e 7. Os fatores de 66 são 2, 3 e 11; alí encontramos também os fatores 2, 3 e 11.

Para êste processò, temos a seguinte

Regra: *Decompõe-se cada um dos números dados em seus fatores primos; separam-se todos os fatores primos do maior número dado, e juntam-se a êles os fatores dos outros números, que não estiverem neles incluidos e rejeitam-se os que já estiverem incluidos, e o produto continuado dêstes fatores separados será o* **m. m. c.**

Achar o **m. m. c.** dos seguintes números:

1. De 8, 10 e 15. Resp. 120
2. De 6, 9 e 12. " 36
3. De 12, 18 e 24. " 72
4. De 8, 14, 21 e 28 Resp. ?
5. De 10, 15, 20 e 30. " ?
6. De 15, 30, 70 e 105. " ?

131. Segundo processo. O segundo processo para achar o **m. m. c.** é muito mais simples e fácil do que o primeiro, e por isso deve ser cuidadosamente exercitado pelos alunos afim de poderem executá-lo com presteza e exatidão.

Problema. Qual é o **m. m. c.** de 4, 6, 8 e 12?

Solução. Escrevem-se os números, 4, 6, 8 e 12 e sublinham-se. Acha-se depois o menor divisor que divida um ou mais dêstes números sem deixar resto. Ora, o menor divisor é 2 que, neste caso, divide três dos números dados. Escreve-se 2 à direita dos números, e dividem-se por êle todos os números, pondo debaixo de cada um o seu quociente. Então, diz-se 4, dividido por 2, dá 2; 6, dividido por 2, dá 3; 8, dividido por 2, dá 4, e 12, dividido por 2, dá 6. Os quocientes desta primeira divisão são 2, 3, 4 e 6. Passa-se um traço debaixo dêstes números, e acha-se outra vez o menor divisor que divida um ou mais números sem deixar resto. Esse divisor é ainda 2, que póde dividir três dos números. Escreve-se 2 à direita dos números, e por êle se dividem todos os que forem divisíveis, pondo debaixo de cada um o seu quociente. O número 3, como não é divisível por 2, passa inteiro, para baixo, e teremos então os números 1, 3, 2 e 3. Como um dos números se pode ainda dividir por 2, escreveremos 2 à direita, como divisor, e por êle dividiremos o número; e como 3 não é divisível por 2, passa para baixo, e temos os números 1, 3, 1, 3. Como resta só 3, escreve-se 3 à direita como divisor, e divide-se por êle, para que todos os quocientes sejam 1. Multiplicando-se agora todos os divisores, temos o produto 24, que é o **m. m. c.** de 4, 6, 8 e 12.

Processo

$$\begin{array}{cccc|c} 4, & 6, & 8, & 12 & 2 \\ \hline 2, & 3, & 4, & 6 & 2 \\ \hline 1, & 3, & 2, & 3 & 2 \\ \hline 1, & 3, & 1, & 3 & 3 \\ \hline 1, & 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$$

Para achar o **m. m. c.** de diversos números, temos a seguinte

Regra: *Escrevem-se todos os números em linha, separados por virgulas, e sublinham-se; acha-se o menor divisor que divida exatamente um ou mais dos números; escreve-se êsse número à direita e divide-se por êle todos os números que forem divisíveis, e escrevem-se debaixo os quocientes e os números que não forem exatamente divisíveis por êle.*

Divide-se ainda esta nova linha de números pelo menor divisor que ao menos divida um dos números, e assim se procede até que não haja nos quocientes senão o algarismo 1. O continuado produto de todos os divisores será a resposta.

Nota. Quando todos os números dados são primos, ou primos entre si, dois a dois, como 8, 9 e 25, o **m. m. c.** dêstes números é o seu produto continuado, $8 \times 9 \times 25 = 1800$.

Achar o **m. m. c.** dos seguintes números:

		Respostas
1.	15 e 20.	60
2.	6, 8 e 9.	72
3.	6, 15 e 35.	210
4.	10, 12, 15.	60
5.	9, 15, 18 e 24.	360
6.	8, 15, 12 e 30.	120
7.	14, 21, 30 e 35. .	210
8.	2, 3, 45, 6, 7, 8 e 9.	?
9.	8, 12, 20, 24 e 25.	?
10.	9, 10, 24, 25, 32 e 45.	?
11.	20, 30, 40 e 50.	?
12.	11, 12, 13 e 5.	?

FRAÇÕES ORDINÁRIAS

132. Fração é uma ou mais partes iguais de uma unidade. A palavra fração vem do latim *frango*, que quer dizer: *Eu quebro*. Uma fração é, portanto, uma ou mais partes iguais de um todo que na numeração tem o nome de unidade ou de 1.

Ilustração. Uma unidade é uma cousa inteira como, por exemplo, uma maçã. Se dividirmos esta maçã em duas partes iguais, será **um meio** da maçã, e se escreverá $\frac{1}{2}$. Se dividirmos a maçã em três partes iguais, cada uma destas partes será **um têrço** da maçã, e se escreverá $\frac{1}{3}$; duas destas partes serão dois terços, e se escreverão $\frac{2}{3}$; e as três partes serão três terços ou a maçã inteira,

Uma unidade — Dois meios — Três terços — Quatro quartos

e se escreverão $\frac{3}{3}$. Se dividirmos a maçã em quatro partes iguais, cada parte será **um quarto** da maçã, e se escreverá $\frac{1}{4}$; duas destas partes serão $\frac{2}{4}$; três destas partes serão $\frac{3}{4}$, etc. Enfim se dividirmos a maçã em cinco partes iguais, cada parte será $\frac{1}{5}$; se a dividirmos em seis partes iguais cada parte será $\frac{1}{6}$; duas destas partes serão $\frac{2}{6}$: três destas partes serão $\frac{3}{6}$; cinco destas partes serão $\frac{5}{6}$, e assim por diante. Fica, pois, evidente que *uma fração é uma ou mais partes iguais em que a unidade está dividida.*

133. Há duas espécies de frações: uma que se denomina frações ordinárias, e outra frações decimais. Agora trataremos sòmente das frações ordinárias, e no capítulo seguinte, trataremos das decimais.

134. **A fração ordinária** compõe-se de dois números, separados por um traço horizontal, como $\frac{2}{3}$. Estes dois números chamam-se *termos* da fração. O termo de cima chama-se **numerador,** e o de baixo **denominador.**

Numerador 2
Denominador 3

O denominador mostra em quantas partes está dividida a unidade e o numerador mostra o número de partes que tem a fração. Assim $\frac{2}{3}$ quer dizer que a unidade foi dividida em 3 partes iguais, e que se tomaram 2 dessas partes.

As frações ordinárias lêem-se do seguinte modo:

$\frac{1}{2}$ um meio.	$\frac{2}{3}$ dois terços.	$\frac{1}{8}$ um oitavo.
$\frac{1}{3}$ um terço.	$\frac{3}{4}$ três quartos.	$\frac{1}{9}$ um nono.
$\frac{1}{4}$ um quarto.	$\frac{2}{5}$ dois quintos.	$\frac{1}{10}$ um décimo.
$\frac{1}{5}$ um quinto.	$\frac{5}{6}$ cinco sextos.	$\frac{3}{11}$ três onze avos.
$\frac{1}{6}$ um sexto.	$\frac{3}{7}$ três sétimos.	$\frac{7}{12}$ sete doze avos.
$\frac{1}{7}$ um sétimo.	$\frac{6}{7}$ seis sétimos.	$\frac{10}{23}$ dez vinte e três avos.

Para ler uma fração, temos a seguinte

Regra: *Enuncia-se primeiro o numerador, e depois o denominador, dando-lhe o nome de meio, terço, quarto, quinto, sexto, sétimo, oitavo, nono e décimo, se fôr 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10; e dêste número para cima, dá-se-lhe o nome cardinal junto com a terminação avos.*

Nota. A palavra avos não significa cousa alguma, é apenas a terminação da palavra oitavos. Os aritméticos antigos usavam dos nomes ordinais até oitavos, e daí por diante, por ser difícil enunciar os denominadores com adjetivos numerais ordinais, usavam dos números cardinais, acrescentando a palavra avos; assim, em lugar de lerem $\frac{1}{34}$ um trigésimo quarto, liam um trinta e quatro avos.

No comércio, as frações ordinárias são escritas com um risco oblíquo, como 1/2 um meio, 2/3 dois terços, 3/4 três quartos, 7/12 sete doze avos, etc.

135. Se medirmos uma quantidade continua com uma unidade determinada, obteremos um dos três resultados seguintes:

1° Se a quantidade contiver aquela unidade um exato número de vezes, obteremos um número inteiro, isto é, um número de unidades completas.

2.° Se a quantidade contiver uma ou mais unidades completas e ainda uma parte da unidade obteremos um número misto, isto é, um número inteiro com uma fração.

3° Se a quantidade fôr menor do que a unidade, obteremos uma fração, isto quer dizer uma parte da unidade.

Daquí resulta que, para exprimir a medida exata de uma grandeza precisamos empregar, segundo o caso, ou um número inteiro, ou um número misto, ou uma fração.

Número inteiro é o que consta de uma ou mais unidades completas, como 1, 3, 8, 20, etc.

Número misto ou fracionário é o que consta de um número inteiro e de uma fração, como $2\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$, $19\frac{7}{8}$, etc.

Fração é uma quantidade menor do que a unidade.

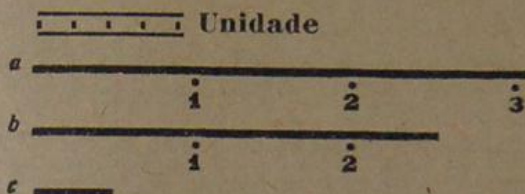
Ilustração. As duas figuras seguintes esclarecerão suficientemente este ponto:

(1.ª Figura) (2.ª Figura)

Unidade

a ——— 1 2 3

b ——— 1 2

c —

Na 1.ª figura, medindo a linha *a* com a unidade, vemos que esta linha contém 3 vezes exatas a unidade, e por isso temos um número inteiro que é *3 unidades;* medindo a linha *b*, vemos que ela contém 2 vezes a unidade e ainda meia unidade, por isso temos um número misto que é $2\frac{1}{2}$ *unidades;* medindo a linha *c*, vemos que ela é igual sòmente a meia unidade, e por isso temos uma fração que é $\frac{1}{2}$ da *unidade.*

Nas quantidades descontínuas notamos também estas três espécies de números. As três maçãs da 2.ª figura formam um número inteiro; as duas maçãs e dois quartos de uma maçã formam um número misto, que é $2\frac{2}{4}$; e os dois quartos separados dos inteiros são uma fração, porque é uma quantidade menor do que a unidade, pois a $\frac{2}{4}$ de uma maçã faltam outros $\frac{2}{4}$ para completar a maçã inteira.

136. Fração composta é aquela que tem em alguns dos seus termos ou em ambos um número misto ou uma fração, como

$\frac{\frac{1}{2}}{4}$ que se lê: *Um meio dividido por quatro.*

$\frac{5\frac{3}{4}}{8\frac{1}{3}}$ que se lê: *Cinco e três quartos dividido por oito e um terço.*

Nota. Quando ambos os termos de uma fração são números inteiros, como $\frac{7}{9}$, $\frac{11}{17}$, etc., a fração chama-se **simples**, para se distinguir da fração composta.

Exercício de aplicação. O discípulo lerá as seguintes frações e números mistos:

1. $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{11}$, [illegible], [illegible], [illegible]

2. $^{3}/_{5}$, $^{3}/_{6}$, $^{2}/_{7}$, $^{8}/_{9}$, $^{7}/_{10}$, $^{15}/_{16}$, $^{9}/_{18}$, $^{23}/_{36}$, $^{9}/_{50}$, [illegible], [illegible]

3. $5\frac{1}{4}$, $6\frac{1}{2}$, $7\frac{2}{8}$, $8\frac{5}{9}$, $10\frac{1}{2}$, $11\frac{1}{4}$, [illegible], [illegible], [illegible]

Valor de uma fração

137. O valor de uma fração depende de duas cousas.

A *primeira* é a grandeza da unidade.

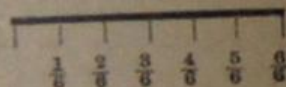
A *segunda* é o número de pártes em que a unidade está dividida.

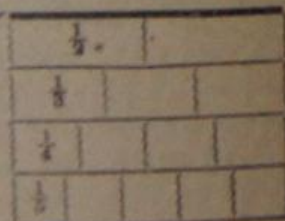
Ilustração. Se tomarmos uma laranja grande e outra pequena, e dividirmos cada uma delas em cinco partes iguais, é claro que as partes da primeira serão maiores do que as da segunda.

Se tomarmos duas laranjas do mesmo tamanho, e dividirmos uma em quatro pártes iguais, e a outra em oito partes, é evidente que as partes da primeira terão o dôbro das da segunda. Se dividirmos uma em duas partes, e a outra em seis, cada parte da primeira será igual a três partes da segunda. Portanto o valor da fração depende da grandeza da unidade e do número de partes em que a unidade está dividida.

138. Quando comparamos duas ou mais frações entre si, notamos a seguinte relação, quanto aos seus valores.

1° Quando duas ou mais frações tiverem **denominadores iguais,** *a fração maior será a que tiver o numerador* ***maior, e a menor,*** *a que tiver o numerador* ***menor.***

Demonstração. Se dividirmos uma linha em seis partes iguais, cada parte será $\frac{1}{6}$, duas partes serão $\frac{2}{6}$: três partes serão $\frac{3}{6}$ e assim por diante. Ora, como o numerador mostra o número das partes iguais da divisão, segue-se que, quanto maior fôr o numerador, tanto maior será a fração; assim $\frac{4}{6}$ é maior do que $\frac{3}{6}$; $\frac{5}{6}$ é maior do que $\frac{4}{6}$, etc.

2° Quando duas ou mais frações tiverem **numeradores iguais,** *a fração maior será a que tiver o denominador* ***menor, e*** *a fração menor será a que tiver o denominador* ***maior.***

Demonstração. Se dividirmos uma linha em duas partes iguais, cada parte será $\frac{1}{2}$; se a dividirmos em três partes iguais, cada parte será $\frac{1}{3}$, menor do que $\frac{1}{2}$: se a dividirmos em quatro partes iguais, cada parte será $\frac{1}{4}$ e já menor do que $\frac{1}{3}$; se a dividirmos em cinco partes, cada parte será $\frac{1}{5}$ e já menor do que $\frac{1}{4}$ porque quanto maior fôr o número de partes, tanto menor será cada parte, como se vê na figura que está à margem. Logo $\frac{1}{2}$ é maior do que $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$ é maior do que $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ é maior do que $\frac{1}{5}$, e assim por diante.

Exercício de aplicação. O discípulo dirá qual é a fração maior, e qual a menor de cada um dos seguintes grupos:

1. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$.	**3.** $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{2}{7}$.	**5.** $\frac{3}{45}$, $\frac{8}{55}$, $\frac{3}{65}$.
2. $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{6}$.	**4.** $\frac{3}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{14}{15}$.	**6.** $\frac{25}{100}$, $\frac{34}{100}$, $\frac{72}{100}$.

Relação entre a fração e a unidade

139. Se compararmos uma fração com a unidade de que procede, acharemos a seguinte relação:

1° Quando o numerador é a metade do denominador, a fração é igual a um meio da unidade.

Demonstração. Se dividirmos uma maçã, em 6 partes iguais, e tomarmos 3 dessas partes, tomamos metade ou $\frac{1}{2}$ da maçã; logo $\frac{3}{6}$ são iguais a $\frac{1}{2}$, e pela mesma razão $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{20}{40}$, $\frac{50}{100}$, etc., são iguais a $\frac{1}{2}$.

2° Quando o numerador é igual ao denominador, a fração é igual à unidade ou a 1.

Demonstração. Se dividirmos uma maçã em 6 partes iguais, cada parte será $\frac{1}{6}$ da maçã; ora se tomarmos 3 dessas partes, tomamos $\frac{1}{2}$ da maçã; se tomarmos 5 partes, tomamos $\frac{5}{6}$; se tomarmos 6 partes, tomamos $\frac{6}{6}$, isto é, a maçã inteira. Logo $\frac{6}{6}$ são iguais a um inteiro ou à unidade, e pela mesma razão $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$. $\frac{4}{4}$. $\frac{5}{5}$, $\frac{12}{12}$, $\frac{100}{100}$, etc. são iguais a 1.

Os discípulos, lendo as seguintes frações, dirão as que são iguais a $\frac{1}{2}$ ou a 1 inteiro.

1. $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{13}{13}$, $\frac{18}{18}$, $\frac{16}{32}$, $\frac{35}{35}$.

2. $\frac{20}{40}$, $\frac{55}{55}$, $\frac{30}{60}$, $\frac{61}{61}$, $\frac{35}{70}$, $\frac{77}{77}$, $\frac{40}{80}$, $\frac{89}{89}$, $\frac{101}{101}$, $\frac{102}{204}$.

Frações próprias e impróprias

140. Muitas vezes sucede que, para se efetuarem certas operações, é necessário escrever um número inteiro ou misto em fórma de fração, e, neste caso, a fração é igual à unidade ou maior do que ela; daqui resulta haver frações próprias e frações impróprias.

Fração própria é a que tem o numerador menor do que o denominador. Chama-se própria, porque é realmente uma fração, visto o seu valor ser menor do que a unidade; assim $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$ e $\frac{10}{15}$ são frações próprias.

Fração imprópria é a que tem o numerador igual ao denominador ou maior do que êle. Chama-se fração imprópria, porque só tem a forma da fração, mas o seu valor é igual à unidade ou maior do que ela: assim $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$ e $\frac{12}{10}$ são frações impróprias.

Ilustração. Podemos saber facilmente quanto falta a uma fração para completar a unidade ou 1 inteiro. Para uma fração ser igual a 1, é necessário que o numerador seja igual ao denominador; portanto a $\frac{3}{4}$ falta $\frac{1}{4}$ para um inteiro, porque 1 tem $\frac{4}{4}$; a $\frac{3}{5}$ faltam $\frac{2}{5}$ para 1; a $\frac{3}{7}$ faltam $\frac{4}{7}$ para 1; a $\frac{8}{10}$ faltam $\frac{2}{10}$ para 1, etc. A fração que completa a unidade, chama-se **fração complementar**; assim a fração complementar de $\frac{5}{9}$ é $\frac{4}{9}$, porque $\frac{5}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} = 1$.

Podemos igualmente saber quanto uma fração imprópria excede a uma unidade: assim $\frac{8}{7}$ excedem $\frac{1}{7}$ a unidade ou 1; $\frac{7}{5}$ excedem $\frac{2}{5}$; $\frac{15}{10}$ excedem $\frac{5}{10}$ etc.

Exercício de aplicação. Os discípulos, lendo as seguintes frações dirão quais são as próprias e quais as impróprias; quanto lhes falta para a unidade ou quanto a excedem, e também indicarão as frações que são iguais a um meio ou a um inteiro.

1. $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{11}{14}$, $\frac{10}{13}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{15}{15}$.
2. $\frac{15}{16}$, $\frac{20}{15}$, $\frac{21}{24}$, $\frac{16}{32}$, $\frac{39}{39}$, $\frac{35}{70}$, $\frac{40}{80}$, $\frac{80}{90}$, $\frac{109}{105}$, $\frac{100}{200}$.

Os discípulos completarão agora as seguintes séries de números até 10, acrescentando a cada número só a fração primitiva.

1. $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$ . . . . até 10.
2. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, 2, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{3}$ . . . até 10.
3. $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $1\frac{3}{4}$, 2 . . . até 10.
4. $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, 1, $1\frac{1}{5}$, $1\frac{2}{5}$, $1\frac{3}{5}$ . . . até 10.
5. $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$, 1, $1\frac{1}{6}$, $1\frac{2}{6}$ . . . até 10.

Dividendo menor do que o divisor

141. Uma fração pode ser considerada de dois modos: ou como um número ou como uma divisão. Como número, ela mostra a quantidade de partes em que a unidade está dividida e as partes que se tomaram; assim $\frac{3}{4}$ mostra que a unidade foi dividida em 4 partes iguais e que se tomaram 3 partes. Consi-

derada como divisão, mostra o quociente do numerador dividido pelo denominador. Em $\frac{3}{4}$, 3 é o dividendo, 4 é o divisor e $\frac{3}{4}$ é o quociente, e por isso esta fração pode também ser lida: *3 dividido por 4.*

Problema. Sendo uma maçã dividida igualmente por 6 meninos, que fração da maçã receberá cada menino?

Solução. O dividendo é a maçã ou 1, e o divisor é 6. Ora, para dividirmos 1 maçã por 6 meninos, temos de parti-la em 6 partes iguais, que são 6 sextos, para darmos um sexto a cada menino; portanto

$$1 \div 6 = \frac{1}{6}$$

Do mesmo modo,

1 dividido por 8 é $\frac{1}{8}$;	12 dividido por 13 é $\frac{12}{13}$;
7 dividido por 9 é $\frac{7}{9}$;	13 dividido por 15 é $\frac{13}{15}$;
11 dividido por 12 é $\frac{11}{12}$;	15 dividido por 19 é $\frac{15}{19}$;

Para dividir um número menor por outro maior, temos a seguinte

Regra: *Escreve-se o dividendo como numerador e o divisor como denominador; a fração resultante será o quociente.*

1. Dividindo-se 1 laranja por 3 meninos, que parte da laranja recebe cada menino? Resp. $\frac{1}{3}$.
2. Dividindo-se 2 laranjas por 5 meninos? Resp. $\frac{2}{5}$.
3. Dividindo-se uma melancia igualmente entre 7 pessoas, que parte recebe cada uma? Resp. $\frac{1}{7}$.
4. Qual é o quociente de 6 dividido por 9? Resp. ?
5. 7 que fração é de 9? ($7 \div 9 = \frac{7}{9}$) Resp. ?
6. 5 que fração é de 14? Resp. ?
7. 15 que fração é de 90? Resp. ?
8. Qual é o quociente de 99 dividido por 100? Resp. ?
9. Qual é o quociente de 31 dividido por 62? Resp. ?
10. Dividir 14 por 28. Resp. ?

Complemento do quociente

142. Quando tratámos da divisão dos números inteiros (n.º **74**), vimos que muitas vezes o divisor não dividia exata-

mente o dividendo, e deixava um resto por dividir; agora, porém, que já sabemos dividir um número menor por um maior, podemos facilmente dividir o resto pelo divisor para completar o quociente.

Quando em uma divisão o resto é, por exemplo, 3 e o divisor 4, temos de dividir 3 por 4 e ficará $\frac{3}{4}$ e esta fração se juntará ao quociente.

Problema. Dividindo-se 5 maçãs por 2 meninos, que porção receberá cada um?

Solução. Dividindo-se 5 por 2, o quociente é 2, e fica 1 de resto. O resto é 1 maçã, que ficou por dividir. Dividindo-se agora 1 maçã por 2, o quociente é um meio, de sorte que cada menino receberá 2 maçãs e um meio de uma maçã.

$$\begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \hline 1 & 2\frac{1}{2} \end{array}$$

Para completarmos o quociente de uma divisão com resto, temos a seguinte

Regra: *Junta-se ao quociente uma fração que tenha o resto por numerador, e o divisor por denominador.*

Completar o quociente nas seguintes divisões:

1.	$35 \div 6 =$	Resp.	$5\frac{5}{6}$	**5.**	$37 \div 15 =$	Resp.	?
2.	$144 \div 7 =$	»	$20\frac{4}{7}$	**6.**	$86 \div 17 =$	»	?
3.	$155 \div 8 =$	»	$19\frac{3}{8}$	**7.**	$125 \div 18 =$	»	?
4.	$268 \div 9 =$	»	$29\frac{7}{9}$	**8.**	$213 \div 19 =$	»	?

Alteração no valor das frações

143. Quando o numerador ou o denominador de uma fração é multiplicado ou dividido por um número inteiro, a fração sofre as seguintes alterações:

1ª **Multiplicando-se** *o numerador de uma fração ou* **dividindo-se** *o denominador por um número inteiro, a fração fica multiplicada por êsse número.*

Demonstração. Se multiplicarmos o numerador de $\frac{1}{3}$ por 2, a fração ficará $\frac{2}{3}$, isto é, 2 vezes $\frac{1}{3}$; se o multiplicarmos por 3, ficará $\frac{3}{3}$, isto é, 3 vezes $\frac{1}{3}$, e assim irá crescendo na razão das unidades do multiplicador.

$$\frac{1 \times 2}{3} = \frac{2}{3}$$

Também se dividirmos o denominador de $\frac{1}{8}$ por 2, a fração ficará $\frac{1}{4}$, isto é, 2 vezes maior, porque $\frac{1}{4}$ é igual a $\frac{2}{8}$; se o dividirmos por 4, a fração ficará $\frac{1}{2}$, isto é, 4 vezes maior, porque $\frac{4}{8}$ é igual a $\frac{1}{2}$, e assim por diante.

$$\frac{1}{8 \div 2} = \frac{1}{4}$$

2º **Dividindo-se** *o numerador de uma fração ou* **multiplicando-se** *o denominador por um número inteiro, a fração fica dividida por êsse número.*

Demonstração. Se dividirmos o numerador de $\frac{6}{8}$ por 2, a fração ficará $\frac{3}{8}$, isto é, ficará na metade, porque a metade de seis oitavos é três oitavos; se o dividirmos por 6, a fração ficará $\frac{1}{8}$; isto é, na sexta parte, porque um sexto de seis oitavos é um oitavo.

$$\frac{6 \div 2}{8} = \frac{3}{8}$$

Também se multiplicarmos o denominador de $\frac{1}{2}$ por 2, a fração ficará $\frac{1}{4}$, isto é, ficará na metade, porque $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{2}{4}$; se o multiplicarmos por 4, a fração ficará $\frac{1}{8}$, isto é, na quarta parte, porque $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{4}{8}$, e assim irá diminuindo na razão das unidades do multiplicador.

$$\frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

Estas duas alterações serão praticadas na multiplicação e divisão de frações.

3ª **Multiplicando-se** *ou* **dividindo-se** *ambos os termos de uma fração pelo mesmo número, não se altera o valor da fração.*

Demonstração. Dividindo-se ambos os termos de $\frac{8}{12}$ por 4, teremos $\frac{2}{3}$; ora, ainda que $\frac{8}{12}$ fique transformada em $\frac{2}{3}$, a fração não muda de valor, porque se dividindo o numerador por 4, a fração fica reduzida à sua quarta parte, em compensação, dividindo-se o denominador por 4, torna-se a fração 4 vezes maior, e assim ficará no seu valor primitivo.

$$\frac{8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{2}{3}$$

Vimos no número 82 que multiplicando-se ou dividindo-se o dividendo e o divisor por um mesmo número, não se altera o valor do quociente; ora, sendo o numerador um dividendo, e o denominador, um divisor, é claro que, se os dois termos forem multiplicados ou divididos pelo mesmo número, não se alterará a fração, que é o quociente.

144. Do que fica exposto, resultam os três princípios seguintes que dão em substância toda a matéria:

I. Uma fração é multiplicada,

1º quando se multiplica o numerador,
2º quando se divide o denominador.

II. Uma fração é dividida,

1º quando se divide o numerador,
2º quando se multiplica o denominador.

III. O valor de uma fração não se altera,

1º quando se multiplicam ambos os termos pelo mesmo número,
2º quando se dividem ambos os termos pelo mesmo número.

Redução e transformação das frações

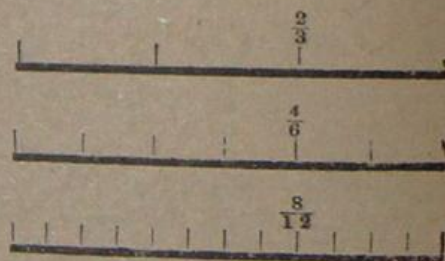
145. Antes de passarmos às quatro operações sôbre números fracionarios e frações, precisamos conhecer quatro processos muito importantes que teem por fim reduzir ou transformar as frações nas suas diferentes formas ou expressões, para podermos depois executar facilmente sôbre elas as diversas operações dos problemas. Esses quatro processos são:

1º Reduzir frações à sua forma mais simples.
2º Extrair números inteiros de frações impróprias.
3º Transformar números inteiros ou mistos em frações impróprias.
4º Reduzir frações ao mínimo denominador comum.

Nota. Em aritmética a palavra reduzir não quer dizer sòmente simplificar, significa também exprimir uma quantidade em forma diversa daquela em que ela se acha, sem lhe alterar o valor, e nesta acepção, quer dizer transformar, converter, etc.

Reduzir frações à sua expressão mais simples

146. Simplificar uma fração ou reduzi-la à sua expressão mais simples é exprimí-la em termos menores mas com o mesmo valor.

Ilustração. Uma fração pode ser reduzida a termos menores, sem sofrer alteração no seu valor. Apesar dêste ponto já ter sido demonstrado, vamos esclarecê-lo ainda com a seguinte ilustração. Se dividirmos uma linha em três partes iguais, cada parte será $\frac{1}{3}$ da linha; dividindo uma linha igual em seis partes iguais, cada parte será $\frac{1}{6}$. Se dividirmos outra linha também igual em doze partes iguais, cada parte será $\frac{1}{12}$ da linha. Observando agora o diagrama que está ao lado, vemos que as frações, $\frac{8}{12}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{2}{3}$, não

obstante terem formas diferentes, exprimem três distâncias perfeitamente iguais, e por isso teem o mesmo valor.

As frações que teem termos diferentes, mas o mesmo valor, chamam-se frações equivalentes, assim $\frac{8}{12}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{2}{3}$ são frações equivalentes, porque exprimem a mesma porção da unidade.

As frações que teem a mesma forma e o mesmo valor, chamam-se idênticas; assim $\frac{5}{8}$ e $\frac{5}{8}$ são frações idênticas, porque são em tudo iguais. Duas frações irredutíveis só podem ter o mesmo valor, quando são idênticas.

147. As frações, quanto á sua redução, podem ser classificadas em redutiveis e irredutíveis.

Fração redutivel é a que pode ser mudada em outra fração com termos menores, mas com o mesmo valor, como $\frac{4}{8}$ que pode ser reduzida a $\frac{2}{4}$ e a $\frac{1}{2}$.

Fração irredutivel é a que não pode receber simplificação, por não haver um divisor comum para os seus termos; assim $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{11}{15}$ etc., são frações irredutíveis.

148. A redução das frações é baseada no seguinte princípio já demonstrado no n. **143,** *3ª alteração*:

Multiplicando-se ou dividindo-se ambos os termos de uma fração pelo mesmo número, não se altera o valor da fração.

Ilustração. Na redução de frações precisamos distinguir os três pontos seguintes:

1.° Se dividirmos os dois termos de uma fração, por qualquer *divisor comum* a ambos, a fração resultante será equivalente à primeira, e terá termos menores.

2.° Se dividirmos os dois termos pelo seu *máximo divisor comum*, a fração resultante será do mesmo modo equivalente, mas terá os seus termos reduzidos à sua forma mais simples, e ficará então irredutível.

3.° Quando uma fração está reduzida à sua fórma mais simples, chama-se **irredutível**, e neste caso os seus termos são primos entre si, isto é, não teem nenhum divisor comum.

Problema. Reduzir a fração $\frac{105}{140}$ à sua forma mais simples.

Solução. Acham-se os números que dividam exatamente ambos os termos da fração até ela ficar irredutível. Dividindo-se ambos os termos por 5, a fração ficará reduzida a $\frac{21}{28}$: dividindo depois ambos os termos de $\frac{21}{28}$ por 7, ficará reduzida a $\frac{3}{4}$, que é a sua forma mais simples.

Dividindo-se a fração por 5 × 7 = 35, que é o máximo divisor comum dos dois termos, ela ficará logo reduzida a $\frac{3}{4}$.

Processo

$$\frac{105 \div 5}{140 \div 5} = \frac{21}{28} = \frac{21 \div 7}{28 \div 7} = \frac{3}{4}.$$

ou

$$\frac{105 \div 35}{140 \div 35} = \frac{3}{4}.$$

Nas diversas operações da Aritmética, há grande vantagem em reduzir uma fração aos seus menores termos, pois é muito mais fácil operar e fazer avaliações com $\frac{3}{4}$ do que com $\frac{105}{140}$ que é equivalente a $\frac{3}{4}$.

Para reduzir uma fração à expressão mais simples, temos a seguinte

Regra: *Dividem-se ambos os seus termos pelo mesmo número; se êles tiverem ainda um divisor comum, continua-se a divisão até a fração ficar irredutível.* **Ou**

Dividem-se ambos os termos pelo seu máximo divisor comum.

Nota. 1.ª Pelos caracteres da divisibilidade expostos no n.º **116**, podemos achar facilmente os diferentes divisores que são comuns a ambos os termos de uma fração.

2.ª Se o numerador e o denominador terminam em cifras, cancela-se igual número de cifras em ambos os termos, como se vê no processo à margem.

Processo

$$\frac{80\emptyset}{99\emptyset} = \frac{80}{99}$$

Reduzir as seguintes frações à sua expressão mais simples:

	Respostas		Respostas		Respostas		Respostas
1. $\frac{3}{6}$	$\frac{1}{2}$	**9.** $\frac{24}{26}$	$\frac{12}{13}$	**17.** $\frac{35}{60}$	?	**25.** $\frac{81}{189}$	?
2. $\frac{2}{6}$	$\frac{1}{3}$	**10.** $\frac{42}{70}$	$\frac{3}{5}$	**18.** $\frac{16}{46}$	?	**26.** $\frac{195}{210}$	?
3. $\frac{4}{6}$	$\frac{2}{3}$	**11.** $\frac{8}{16}$	$\frac{1}{2}$	**19.** $\frac{32}{100}$	?	**27.** $\frac{216}{404}$	?
4. $\frac{6}{8}$	$\frac{3}{4}$	**12.** $\frac{5}{15}$	$\frac{1}{3}$	**20.** $\frac{11}{121}$	?	**28** $\frac{126}{198}$	?
5. $\frac{6}{14}$	$\frac{3}{7}$	**13.** $\frac{5}{20}$	$\frac{1}{4}$	**21.** $\frac{66}{88}$	?	**29.** $\frac{182}{196}$	?
6. $\frac{7}{14}$	$\frac{1}{2}$	**14.** $\frac{6}{24}$	$\frac{1}{4}$	**22.** $\frac{50}{100}$	?	**30.** $\frac{192}{224}$	?
7. $\frac{10}{12}$	$\frac{5}{6}$	**15.** $\frac{15}{45}$	$\frac{1}{3}$	**23.** $\frac{101}{202}$	?	**31.** $\frac{300}{625}$	?
8. $\frac{16}{20}$	$\frac{4}{5}$	**16.** $\frac{20}{60}$	$\frac{1}{3}$	**24** $\frac{1260}{2780}$	?	**32.** $\frac{252}{396}$	?

Extrair os inteiros de frações impróprias

149. Extrair o número inteiro de uma fração imprópria é achar o número inteiro ou misto equivalente à fração dada.

Problema. Extrair o número inteiro de $\frac{12}{4}$.

Solução. 4 quartos são 1 inteiro, então 12 quartos são $12 \div 4 = 3$ inteiros.

Operação

$$\frac{12}{4} = 12 \div 4 = 3$$

Problema. Extrair o número inteiro de $\frac{8}{3}$.

Solução. 3 terços são 1 inteiro; então 8 terços são $8 \div 3 = 2\frac{2}{3}$, que é o número misto equivalente

Operação

$$\frac{8}{3} = 8 \div 3 = 2\frac{2}{3}$$

Para extrair o número inteiro de uma fração imprópria, temos a seguinte

Regra: *Divide-se o numerador da fração pelo denominador; se não houver resto, o quociente será número inteiro, se houver, o quociente será número misto.*

Extrair os inteiros das seguintes frações impróprias:

	Respostas		Respostas		Respostas		Respostas
1. $\frac{6}{3}$ . . .	2	6. $\frac{44}{11}$	?	11. $\frac{128}{16}$ . . .	?	16. $\frac{256}{16}$ . . .	?
2. $\frac{16}{4}$ . . .	4	7. $\frac{54}{11}$	?	12. $\frac{149}{21}$ . . .	?	17. $\frac{263}{16}$ . . .	?
3. $\frac{19}{4}$ . . .	$4\frac{3}{4}$	8. $\frac{60}{12}$	?	13. $\frac{225}{25}$ . . .	?	18. $\frac{636}{32}$ . . .	?
4. $\frac{35}{7}$ . . .	5	9. $\frac{72}{13}$	?	14. $\frac{328}{32}$ . . .	?	19. $\frac{720}{80}$ . . .	?
5. $\frac{58}{9}$ . . .	$6\frac{4}{9}$	10. $\frac{98}{14}$	?	15. $\frac{436}{246}$ . . .	?	20. $\frac{1128}{64}$ . . .	?

Transformar números inteiros ou mistos em frações impróprias

150. Transformar um número inteiro ou misto em uma fração imprópria é achar uma fração do mesmo valor que o inteiro ou misto.

Problema. Transformar 5 em terços.

Solução. 1 inteiro tem 3 terços; então 5 inteiros teem 5 × 3 = 15 terços.

$$5 = \frac{5 \times 3}{3} = \frac{15}{3}$$

Problema. Transformar $6\frac{3}{4}$ em uma fração imprópria.

Solução. 1 inteiro tem 4 quartos, e 6 inteiros teem 6 × 4 = 24 quartos; juntando mais 3 da fração, fazem 27 quartos.

$$6\frac{3}{4} = \frac{6 \times 4 + 3}{4} = \frac{27}{4}$$

Para transformar números inteiros ou mistos em frações, temos a seguinte

Regra geral: *Quando o número é inteiro, multiplica-se pelo denominador dado, e o produto escreve-se sôbre o denominador.*

Quando o número é misto, multiplica-se a parte inteira pelo denominador da fração, e o produto, somado com o numerador, escreve-se sôbre o denominador.

1. Transformar 9 em terços .... Resp. $\frac{27}{3}$
2. Transformar 15 em sétimos .... " ?
3. Transformar 25 em nonos .... " ?
4. Transformar 144 em décimos .... " $\frac{1440}{10}$

Transformar os seguintes números mistos em frações impróprias:

1. $2\frac{1}{2}$.	Resp. $\frac{5}{2}$	5. $7\frac{2}{3}$.	Resp. $\frac{23}{3}$	9. $3\frac{3}{25}$.	Resp. ?
2. $6\frac{1}{3}$.	» $\frac{19}{3}$	6 $8\frac{1}{5}$.	» $\frac{41}{5}$	10. $19\frac{1}{10}$.	» ?
3. $8\frac{2}{5}$.	» $\frac{42}{5}$	7. $6\frac{5}{12}$.	» $\frac{77}{12}$	11. $18\frac{1}{6}$.	» ?
4. $9\frac{2}{7}$.	» $\frac{65}{7}$	8. $7\frac{2}{7}$.	» $\frac{51}{7}$	12. $30\frac{2}{13}$.	» ?

Reduzir frações ao mínimo denominador comum

151. Reduzir duas ou mais frações ao mínimo denominador comum é transformá-las em frações equivalentes, mas com denominadores iguais. Este processo é muito importante, pois não podemos operar uma adição nem uma subtração em frações, sem primeiro reduzí-las a um denominador comum.

Ilustração. Vimos no número 143 que, multiplicando ambos os termos de uma fração por um mesmo número, não lhe alteraremos o seu valor. Como as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ teem denominadores diferentes, podemos, sem lhes alterar o valor, multiplicar por 4 os termos da primeira, e por 3 os da segunda, e temos $\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$ isto é, duas frações equivalentes às primeiras e com denominadores iguais.

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

152. Há dois processos de redução que precisamos conhecer para preferir o melhor: **um reduz as frações a um denominador comum**, que é sempre o produto continuado de todos os denominadores dados; o outro reduz as frações ao mínimo denominador comum, o que facilita as operações, e o torna muito mais vantajoso, e preferível ao outro.

153. Exposição do **primeiro processo.**

Problema. Reduzir as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{12}$ a um denominador comum.

Solução. Multiplicando o numerador de cada fração pelos denominadores das outras duas, e depois multiplicando cada denominador pelos outros dois denominadores, teremos $\frac{96}{144}$, $\frac{108}{144}$ e $\frac{60}{44}$ que são frações equivalentes ás primeiras e teem um denominador comum.

Operação

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4 \times 12}{3 \times 4 \times 12} = \frac{96}{144}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3 \times 12}{4 \times 3 \times 12} = \frac{108}{144}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{5 \times 4 \times 3}{12 \times 4 \times 3} = \frac{60}{144}$$

Demonstração. Observando a multiplicação continuada que produziu cada fração equivalente, notamos o seguinte: Ambos os termos de $\frac{2}{3}$ foram multiplicados por 4 e por 12; ambos os termos de $\frac{3}{4}$ foram multiplicados por 3 e por 12, enfim ambos os termos de $\frac{5}{2}$ foram multiplicados por 4 e por 3; ora, dêsde que, multiplicando ambos os termos de uma fração

pelo mesmo número, não se lhe altera o valor, segue-se que as frações resultantes são equivalentes às primitivas.

Para reduzir duas ou mais frações a um denominador comum, temos a seguinte

Regra: *Multiplicam-se ambos os termos de cada fração pelos denominadores das outras.*

154. Exposição do **segundo processo.**

Problema. Reduzir $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{12}$ ao mínimo denominador comum.

Solução. Acharemos primeiro o mínimo múltiplo comum dos denominadores 3, 4 e 12. (Vêde n.º **130**). O mínimo múltiplo comum é 12, que será também o mínimo denominador comum das três frações. Escreveremos, pois, o número 12 debaixo de cada fração, pondo-lhe um risco em cima, como $\overline{12}$, $\overline{12}$, $\overline{12}$, para sôbre êle escrevermos o numerador. O número 12 será agora dividido por cada um dos denominadores, e o quociente multiplicado pelo seu respetivo numerador.

Operação

$$\frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{5}{12}$$

$$\frac{8}{12},\quad \frac{9}{12},\quad \frac{5}{12}$$

Comecemos a operação por $\frac{2}{3}$; então 12 dividido por 3 dá 4, e 4 multiplicado por 2 dá 8, que escreveremos sôbre 12; teremos $\frac{8}{12}$, equivalente a $\frac{2}{3}$.

Passando a $\frac{3}{4}$, temos $12 \div 4 = 3$, e $3 \times 3 = 9$, que escreveremos sôbre 12, e teremos $\frac{9}{12}$, equivalente a $\frac{3}{4}$.

Passando a $\frac{5}{12}$ temos $12 \div 12 = 1$ e $1 \times 5 = 5$, que escreveremos sôbre 12, e teremos $\frac{5}{12}$, fração idêntica a $\frac{5}{12}$.

Nesta solução vemos que êste processo apresenta as frações reduzidas aos termos mais simples em que elas podem ter um denominador comum, pois ficam reduzidas a $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$ e $\frac{5}{12}$, enquanto que o primeiro processo as apresenta em termos muito elevados, como $\frac{96}{144}$, $\frac{108}{144}$ e $\frac{60}{144}$, o que torna as operações mais difíceis, morosas e sujeitas a erros. Devemos, portanto, preferir e praticar o segundo processo.

Demonstração do segundo processo. O mínimo múltiplo comum dos três denominadores é 12. Operando com $\frac{2}{3}$, dividimos 12 por 3, e achamos que o novo denominador 12 contém 4 vezes o denominador 3, para compensar esta diferença; multiplicamos o numerador 2 por 4, tornando-o 4 vezes maior, e temos $\frac{8}{12}$, isto é, ambos os termos de $\frac{2}{3}$ multiplicados por 4; ora já ficou demonstrado que, se os dois termos de uma fração forem multiplicados por um mesmo número, o valor da fração não será alterado (n.º **143**). Do mesmo modo se demonstra a redução das outras frações.

Para reduzir duas ou mais frações ao mínimo denominador comum, temos a seguinte

Regra: *Simplificam-se as frações redutíveis; acha-se depois o mínimo múltiplo comum dos denominadores das frações, e êste será o mínimo denominador comum.*

Divide-se êste denominador comum por cada denominador das frações, multiplica-se o quociente pelo numerador correspondente, e o produto se escreverá sôbre o denominador comum.

Nota. Quando todos os denominadores forem primos entre si, o mínimo múltiplo comum será o seu produto continuado. (Vêde n.° **131**, Nota).

E' muito conveniente simplificar as frações redutíveis antes de começar êste processo, para se obter na operação o menor denominador possivel.

Reduzir os seguintes grupos de frações ao seu mínimo denominador comum.

		Respostas			Respostas
1.	$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ . . .	$\frac{4}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}$	**7.**	$\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{9}{14}$	?
2.	$\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{4}{5}$ . . .	$\frac{20}{40}, \frac{15}{40}, \frac{32}{40}$	**8.**	$\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{8}$	?
3.	$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{6}{7}$ . . .	$\frac{35}{70}, \frac{42}{70}, \frac{60}{70}$	**9.**	$\frac{5}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{15}$	?
4.	$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ . . .	$\frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{5}{6}$	**10.**	$\frac{25}{50}, \frac{33}{60}, \frac{18}{30}, \frac{12}{20}$	?
5.	$\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}$ . . .	$\frac{4}{12}, \frac{10}{12}, \frac{7}{12}$	**11.**	$\frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}$	?
6.	$\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{11}{16}$ . . .	$\frac{12}{16}, \frac{10}{16}, \frac{11}{16}$	**12.**	$\frac{2}{6}, \frac{8}{24}, \frac{16}{48}, \frac{4}{12}$	?

Somar frações

155. Na operação de somar frações há três casos para considerar que são:

1° Somar frações que teem o mesmo denominador.
2° Somar frações que teem denominadores diferentes.
3° Somar frações e números inteiros ou mistos

1° Caso. Problema. Qual é a soma de $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$?

Solução. 1 quarto mais 2 quartos mais 3 quartos são 6 quartos; e $\frac{6}{4}$, transformados em inteiros, são $1\frac{2}{4}$.

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$$

Para somar duas ou mais frações, temos as seguintes

Regras: I. *Quando as frações teem o mesmo denominador, adicionam-se os numeradores e escreve-se a soma sôbre o denominador comum.*

2° Caso. Problema. Qual é a soma de $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$?

Solução. As frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$, reduzidas ao mínimo denominador comum, ficam $\frac{6}{12}$, $\frac{8}{12}$ e $\frac{3}{12}$; e somam $\frac{17}{12}$ ou $1\frac{5}{12}$.

$$\frac{6}{12} + \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{17}{12}$$

II. *Quando os denominadores são diferentes reduzem-se ao mínimo denominador comum, e somam-se.*

3° Caso. Problema. Qual é a soma de $8\frac{1}{3}$, $6\frac{1}{2}$, $9\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$?

Solução. As quatro frações reduzidas ao mínimo denominador comum e somadas dão $\frac{27}{12} = 2\frac{3}{12}$. A fração $\frac{3}{12}$ fica debaixo das frações, e os 2 inteiros juntam-se com os outros inteiros, que dão 2 + 8 + + 6 + 9 = 25. O total das quatro parcelas é, pois, $25\frac{3}{12}$ ou, ainda $25\frac{1}{4}$.

Operação

$8\frac{1}{3}$	$\frac{4}{12}$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{6}{12}$
$9\frac{3}{4}$	$\frac{9}{12}$
$0\frac{2}{3}$	$\frac{8}{12}$
$25\frac{3}{12}$	$\frac{27}{12}$

III. *Quando há inteiros e frações, reduzem-se as frações ao mínimo denominador comum, somam-se, e depois adicionam-se com os inteiros.*

Achar a solução dos seguintes exercícios:

		Respostas			Respostas
1.	$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} =$	$1\frac{1}{5}$	**9.**	$\frac{3}{5} + \frac{8}{5} + \frac{12}{5} =$	?
2.	$\frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} =$	$\frac{5}{6}$	**10.**	$\frac{3}{8} + \frac{5}{4} + \frac{6}{18} =$	?
3.	$\frac{7}{20} + \frac{6}{20} + \frac{4}{20} =$	$\frac{17}{20}$	**11.**	$\frac{2}{6} + \frac{1}{3} + \frac{5}{8} =$	?
4.	$\frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} =$	$\frac{13}{24}$	**12.**	$8\frac{1}{5} + \frac{5}{6} + 3 =$	?
5.	$\frac{3}{4} + \frac{3}{6} + \frac{3}{8} =$	$1\frac{5}{8}$	**13.**	$\frac{120}{240} + \frac{33}{132} + \frac{77}{308} =$	?
6.	$\frac{5}{10} + \frac{4}{8} + \frac{7}{14} =$	$1\frac{1}{2}$	**14.**	$8\frac{1}{2} + 7\frac{1}{4} + 6\frac{1}{3} =$	?
7.	$3\frac{1}{2} + 5\frac{1}{4} + 1 =$	$9\frac{3}{4}$	**15.**	$\frac{10}{5} + \frac{12}{6} + \frac{14}{7} =$	?
8.	$5\frac{1}{3} + 2\frac{1}{4} + \frac{5}{12} =$	8	**16.**	$1\frac{3}{4} + 2\frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$	?

(17.)		(18.)	(19.)	(20.)	(21.)
$8\ ^1/_4$	$^2/_8$	$12\ ^1/_3$	$125\ ^3/_8$	$1564\ ^3/_6$	$5643\ ^1/_2$
$7\ ^1/_8$	$^1/_8$	$15\ ^5/_6$	$234\ ^1/_4$	$2305\ ^3/_4$	$6380\ ^2/_3$
$5\ ^1/_2$	$^4/_8$	$18\ ^2/_3$	$305\ ^1/_2$	$1641\ ^7/_8$	$7853\ ^3/_4$
$6\ ^3/_4$	$^6/_8$	$19\ ^1/_2$	$420\ ^3/_4$	$8756\ ^1/_3$	$8216\ ^5/_6$
$27\ ^5/_8$	$^{13}/_8$				

Subtrair frações

156. Na subtração de frações há 3 casos para considerar, que são:

1° Subtrair uma fração de outra, tendo ambas o mesmo denominador.

Regra: *Simplificam-se as frações redutíveis; acha-se depois o mínimo múltiplo comum dos denominadores das frações, e êste será o mínimo denominador comum.*

Divide-se êste denominador comum por cada denominador das frações, multiplica-se o quociente pelo numerador correspondente, e o produto se escreverá sôbre o denominador comum.

Nota. Quando todos os denominadores forem primos entre si, o mínimo múltiplo comum será o seu produto continuado. (Vêde n.° **131**, Nota).

E' muito conveniente simplificar as frações redutíveis antes de começar êste processo, para se obter na operação o menor denominador possivel.

Reduzir os seguintes grupos de frações ao seu mínimo denominador comum.

		Respostas
1.	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ . . .	$\frac{4}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{1}{8}$
2.	$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{5}$ . . .	$\frac{20}{40}$, $\frac{15}{40}$, $\frac{32}{40}$
3.	$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{7}$ . . .	$\frac{35}{70}$, $\frac{42}{70}$, $\frac{60}{70}$
4.	$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$ . . .	$\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{6}$
5.	$\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ . . .	$\frac{4}{12}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{7}{12}$
6.	$\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{16}$ . . .	$\frac{12}{16}$, $\frac{10}{16}$, $\frac{11}{16}$

		Respostas
7.	$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{9}{14}$	?
8.	$\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{8}$	?
9.	$\frac{5}{8}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{15}$	?
10.	$\frac{25}{50}$, $\frac{33}{60}$, $\frac{18}{30}$, $\frac{12}{20}$	?
11.	$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$	?
12.	$\frac{2}{6}$, $\frac{8}{24}$, $\frac{16}{48}$, $\frac{4}{12}$	?

Somar frações

155. Na operação de somar frações há três casos para considerar que são:

1° Somar frações que teem o mesmo denominador.
2° Somar frações que teem denominadores diferentes.
3° Somar frações e números inteiros ou mistos

1° Caso. Problema. Qual é a soma de $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$?

Solução. 1 quarto mais 2 quartos mais 3 quartos são 6 quartos; e $\frac{6}{4}$, transformados em inteiros, são $1\frac{2}{4}$.

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$$

Para somar duas ou mais frações, temos as seguintes

Regras: I. *Quando as frações teem o mesmo denominador, adicionam-se os numeradores e escreve-se a soma sôbre o denominador comum.*

2° Caso. Problema. Qual é a soma de $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$?

Solução. As frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$, reduzidas ao mínimo denominador comum, ficam $\frac{6}{12}$, $\frac{8}{12}$ e $\frac{3}{12}$; e somam $\frac{17}{12}$ ou $1\frac{5}{12}$.

$$\frac{6}{12} + \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{17}{12}$$

II. *Quando os denominadores são diferentes reduzem-se ao mínimo denominador comum, e somam-se.*

3° Caso. Problema. Qual é a soma de $8\frac{1}{3}$, $6\frac{1}{2}$, $9\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$?

Solução. As quatro frações reduzidas ao mínimo denominador comum e somadas dão $\frac{27}{12} = 2\frac{3}{12}$. A fração $\frac{3}{12}$ fica debaixo das frações, e os 2 inteiros juntam-se com os outros inteiros, que dão $2 + 8 + 6 + 9 = 25$. O total das quatro parcelas é, pois, $25\frac{3}{12}$ ou, ainda $25\frac{1}{4}$.

Operação

$8\frac{1}{3}$	$\frac{4}{12}$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{6}{12}$
$9\frac{3}{4}$	$\frac{9}{12}$
$0\frac{2}{3}$	$\frac{8}{12}$
$25\frac{3}{12}$	$\frac{27}{12}$

III. *Quando há inteiros e frações, reduzem-se as frações ao mínimo denominador comum, somam-se, e depois adicionam-se com os inteiros.*

Achar a solução dos seguintes exercícios:

		Respostas			Respostas
1.	$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} =$	$1\frac{1}{5}$	**9.**	$\frac{3}{5} + \frac{8}{5} + \frac{12}{5} =$	?
2.	$\frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} =$	$\frac{5}{6}$	**10.**	$\frac{3}{5} + \frac{5}{4} + \frac{6}{18} =$	?
3.	$\frac{7}{20} + \frac{6}{20} + \frac{4}{20} =$	$\frac{17}{20}$	**11.**	$\frac{2}{6} + \frac{1}{3} + \frac{5}{8} =$	?
4.	$\frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} =$	$\frac{13}{24}$	**12.**	$8\frac{1}{5} + \frac{5}{8} + 3 =$	?
5.	$\frac{3}{4} + \frac{3}{6} + \frac{3}{8} =$	$1\frac{5}{8}$	**13.**	$\frac{120}{240} + \frac{33}{132} + \frac{77}{308} =$	?
6.	$\frac{5}{10} + \frac{4}{8} + \frac{7}{14} =$	$1\frac{1}{2}$	**14.**	$8\frac{1}{2} + 7\frac{1}{4} + 6\frac{1}{3} =$	?
7.	$3\frac{1}{2} + 5\frac{1}{4} + 1 =$	$9\frac{3}{4}$	**15.**	$\frac{10}{5} + \frac{12}{6} + \frac{14}{7} =$	?
8.	$5\frac{1}{3} + 2\frac{1}{4} + \frac{5}{12} =$	8	**16.**	$1\frac{3}{4} + 2\frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$	?

(17.)		(18.)	(19.)	(20.)	(21.)
8 1/4	2/8	12 1/3	125 3/8	1564 3/6	5643 1/2
7 1/8	1/8	15 5/6	234 1/4	2305 3/4	6380 2/3
5 1/2	4/8	18 2/3	305 1/2	1641 7/8	7853 3/4
6 3/4	6/8	19 1/2	420 3/4	8756 1/3	8216 5/6
27 5/8	13/8				

Subtrair frações

156. Na subtração de frações há 3 casos para considerar, que são:

1° Subtrair uma fração de outra, tendo ambas o mesmo denominador.

2º Subtrair uma fração de outra, quando os denominadores são diferentes.

3º Subtrair uma fração de um número inteiro ou misto.

1º Caso. Problema. De $\frac{3}{4}$, subtraindo $\frac{2}{4}$, quanto resta?

Solução. De 3 quartos subtraindo 2 quartos, resta um quarto.

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

Para efetuar uma subtração sôbre frações, temos as seguintes

Regras: I. *Quando ambas as frações teem o mesmo denominador, acha-se a diferença entre os numeradores, e escreve-se sôbre o denominador comum.*

2º Caso. Problema. *Subtraindo* $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{2}$, quanto resta?

Solução. Reduzindo $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ ao mínimo denominador comum, temos $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{4}$; ora, de 2 quartos tirando 1 quarto, resta 1 quarto.

$$\frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

II. *Quando os denominadores são diferentes, reduzem-se as frações ao mínimo denominador comum, e depois opera-se a subtração.*

3º Caso. Problema. De $8\frac{1}{3}$ subtraindo $3\frac{1}{2}$, quanto resta?

Solução. Reduzindo $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ ao mesmo denominador, temos $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{6}$. Como não podemos subtraír $\frac{3}{6}$ de $\frac{2}{6}$; tiramos 1 unidade de 8, e, como 1 tem $\frac{6}{6}$ com os $\frac{2}{6}$ fazem $\frac{8}{6}$. Agora, de $\frac{8}{6}$ tirando $\frac{3}{6}$, restam $\frac{5}{6}$, e de 7 tirando 3, resta 4. A resposta é $4\frac{5}{6}$. Podemos também resolver êste caso transformando os dois termos em frações impróprias, e operar como na regra acima, mas é mais trabalhoso e demorado.

$$8\frac{1}{3} = 7\frac{8}{6}$$
$$3\frac{1}{2} = 3\frac{3}{6}$$
$$4\frac{5}{6}$$

III. ***Quando o minuendo ou ambos os termos da subtração são números mistos, reduzem-se as frações ao mínimo denominador comum, e se a do minuendo fôr inferior à do subtraendo, tira-se uma unidade do inteiro para juntar com a fração, e opera-se depois a subtração.***

Resolver as seguintes subtrações:

		Respostas			Respostas
1.	$\frac{8}{9} - \frac{5}{9} =$	$\frac{3}{9}$	**6.**	$\frac{8}{9} - \frac{2}{9} =$	?
2.	$\frac{3}{4} - \frac{1}{3} =$	$\frac{5}{12}$	**7.**	$\frac{1}{12} - \frac{1}{14} =$	?
3.	$\frac{3}{5} - \frac{1}{4} =$	$\frac{7}{20}$	**8.**	$\frac{7}{14} - \frac{3}{7} =$	?
4.	$7\frac{1}{2} - \frac{3}{4} =$	$6\frac{3}{4}$	**9.**	$2\frac{1}{2} - \frac{3}{4} =$	?
5.	$8\frac{1}{2} - 4\frac{1}{4} =$	$4\frac{1}{4}$	**10.**	$5\frac{1}{2} - 2\frac{4}{5} =$	?

11. De $\frac{5}{8} + \frac{3}{5}$ subtrair $\frac{5}{6} - \frac{3}{5}$. Resp. $\frac{119}{120}$
12. De $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{7}{10}$ subtrair $\frac{3}{7}$. » $1\frac{113}{210}$
13. De $4\frac{1}{2} + 3\frac{2}{3}$ subtrair $2\frac{2}{3}$. » ?
14. De $5\frac{1}{2} + 4\frac{3}{6}$ subtrair $3\frac{1}{3}$. » ?
15. De $20\frac{5}{9} + 9\frac{3}{4}$ subtrair $11\frac{3}{9}$. » ?

Multiplicar frações

157. Na multiplicação de frações há quatro casos para considerar, que são:

1° Multiplicar uma fração por um número inteiro.
2° Multiplicar um inteiro por uma fração.
3° Multiplicar uma fração por outra fração.
4° Multiplicar uma fração por um número misto.

1° Caso. Este caso pode ser resolvido de dois modos, ou multiplicando-se o numerador, ou dividindo-se o denominador.

Problema. Multiplicar $\frac{3}{4}$ por 4.

Solução. 1°. Modo. Multiplicar uma fração por um número inteiro é tomar a fração tantas vezes, quantas são as unidades do inteiro. Assim, $\frac{3}{4} \times 4 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$; pois 4 vezes 3 quartos são 12 quartos, ou 3 inteiros.

Operação

$$\frac{3}{4} \times 4 = \frac{3 \times 4}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

2.° Modo. Como vimos no n.° 143, dividir o denominador de uma fração por um número inteiro é o mesmo que multiplicar a fração por êsse número. Portanto dividindo-se o denominador de $\frac{3}{4}$ por 4, é o mesmo que multiplicar a fração por 4, e o resultado, como se vê no cálculo, é 3 inteiros. Este modo de multiplicação só é praticável, quando o denominador se divide exatamente pelo inteiro, como no caso presente. Damos aquí só a regra do primeiro modo.

$$\frac{3}{4} \times 4 = \frac{3}{4 \div 4} = \frac{3}{1} = 3.$$

Para operar a multiplicação de frações, temos as seguintes

Regras: I. *Quando o multiplicador é número inteiro, multiplica-se o numerador da fração por êsse número, e escreve-se o produto sôbre o denominador.*

Operar as seguintes multiplicações:

1. $\frac{5}{6} \times 3 =$ Resp. $2\frac{1}{2}$
2. $\frac{2}{5} \times 9 =$ » $3\frac{3}{5}$
3. $\frac{3}{9} \times 7 =$ » $2\frac{1}{3}$
4. $\frac{7}{10} \times 8 =$ » $5\frac{3}{5}$
5. $\frac{6}{8} \times 5 =$ Resp. ?
6. $\frac{11}{12} \times 6 =$ » ?
7. $\frac{10}{15} \times 21 =$ » ?
8. $\frac{15}{30} \times 14 =$ » ?
9. $\frac{22}{36} \times 15 =$ Resp. ?
10. $\frac{28}{88} \times 21 =$ » ?
11. $\frac{50}{90} \times 30 =$ » ?
12. $\frac{66}{99} \times 36 =$ » ?

2° Caso. Problema. Multiplicar 6 por $\frac{1}{3}$.

$$6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Solução. Multiplicando o inteiro pelo numerador da fração, temos $6 \times 1 = 6$, que são 6 terços ou 2 inteiros.

Demonstração. Multiplicando 6 por 1, temos $6 \times 1 = 6$, mas como o multiplicador é $\frac{1}{3}$ isto é, a terça parte de 1, o produto deve ser também a terça parte de 6 que é $\frac{6}{3} = 2$.

II. *Quando o multiplicando é número inteiro multiplica-se pelo numerador da fração, e escreve-se o produto sôbre o denominador.*

Ilustração. Ainda que a multiplicação de uma fração por um número inteiro se opere do mesmo modo que a multiplicação de um inteiro por uma fração, e dê o mesmo resultado, há grande diferença na análise das duas operações.

Multiplicar $\frac{1}{3}$ por 6 é repetir um têrço 6 vezes, que são 6 têrços ou 2 inteiros, e neste caso, o produto é maior do que o multiplicando. Mas multiplicar 6 por $\frac{1}{3}$ é reduzir 6 à sua têrça parte, que é $6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$, e neste caso, o produto é menor do que o multiplicando. Para compreender êste resultado, notaremos que multiplicar é repetir ou tomar um número tantas vezes quantas são as unidades do multiplicador. Assim,

Multiplicar 6 por 2 é tomar 6 duas vezes, que são 12.

Multiplicar 6 por 1 é tomar 6 uma vez, que é 6.

Multiplicar 6 por $\frac{1}{2}$ é tomar a metade de 6, que é 3.

Multiplicar 6 por $\frac{1}{3}$ é tomar a têrça parte de 6, que é 2.

Portanto, quando o multiplicador fôr menor do que a unidade, o produto será sempre inferior ao multiplicando.

3° Caso. Problema. Multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$.

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{8}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

Solução. Multiplicando os numeradores, temos $2 \times 4 = 8$; multiplicando depois os denominadores, temos $3 \times 5 = 15$. O produto é $\frac{8}{15}$.

Demonstração. Multiplicando o numerador de $\frac{2}{3}$ por 4, temos $\frac{8}{3}$, isto é, temos 4 vezes 2 têrços, que são 8 têrços. Mas o multiplicador é a quinta parte de 4, que são $\frac{4}{5}$, e o produto deve ser também a quinta parte de $\frac{8}{3}$. Multiplicando agora o denominador de $\frac{8}{3}$ por 5 é o mesmo que reduzir esta fração à sua quinta parte (n.° 143) e então temos $\frac{8}{15}$. Portanto,

III. *Quando são duas ou mais frações, multiplicam-se entre si os numeradores, e o mesmo se faz com os denominadores; os dois produtos serão os termos da fração requerida.*

4° Caso. Problema. Multiplicar $\frac{2}{3}$ por $2\frac{1}{5}$.

$$\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{5} = ?$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{11}{5} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$$

Solução. Transforma-se o número misto em uma fração imprópria (n.° 150), e depois procede-se à multiplicação, que dá o produto $1\frac{7}{15}$.

Para operar qualquer multiplicação sôbre frações, temos a seguinte

Regra geral: *Se um dos termos da multiplicação é número inteiro, dá-se-lhe o denominador 1; se é misto, reduz-se a uma fração imprópria, e depois efetua-se a multiplcação como em duas frações.*

Operar as seguintes multiplicações:

	Respostas		Respostas		Respostas
1. $\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} =$	$\frac{3}{20}$	**6.** $\frac{5}{6} \times 7\frac{1}{2} =$	?	**11.** $25 \times 8\frac{1}{5} =$	?
2. $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} =$	$\frac{15}{28}$	**7.** $14 \times \frac{5}{7} =$	?	**12.** $10\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} =$	?
3. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} =$	$\frac{8}{15}$	**8.** $\frac{7}{8} \times \frac{9}{10} =$	?	**13.** $\frac{2}{7} \times \frac{5}{9} \times \frac{14}{11} =$	?
4. $\frac{7}{8} \times \frac{8}{7} =$	1	**9.** $\frac{9}{15} \times \frac{7}{30} =$	?	**14** $\frac{9}{18} \times \frac{11}{22} \times \frac{17}{34} =$	?
5. $2\frac{2}{5} \times 3\frac{1}{3} =$	8	**10.** $5\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4} =$	?	**15.** $\frac{14}{42} \times \frac{7}{21} \times \frac{9}{27} =$	?

16. Um menino estuda $5\frac{1}{2}$ horas por dia; em 6 dias, quantas horas estudará? Resp. 33

17. Um homem anda $\frac{3}{4}$ de uma légua por hora; quanto andará êle em 9 horas? Resp. $6\frac{3}{4}$.

18. Dei $2\frac{1}{2}$ maçãs a cada uma das 6 meninas de minha classe; quantas maçãs distribuí? Resp. 15.

19. Multiplicar $\frac{13}{24}$ por 47. Resp. $25\frac{11}{24}$.

20. Multiplicar $\frac{21}{52}$ por 26. Resp. ?

Multiplicação cancelada

158. A multiplicação de frações pode ser muito abreviada, cancelando os numeradores e denominadores iguais, e dividindo os numeradores e denominadores por um divisor comum, se o houver. (Vêde n.º **107**)

Problema. Qual é o produto de $\frac{3}{7} \times \frac{7}{5} \times \frac{2}{3}$?

Solução. Como o numerador da primeira fração é igual ao denominador da terceira, cancelam-se os dois termos, que desaparecem da multiplicação. Como o numerador da segunda fração é igual ao denominador da primeira, cancelam-se os dois termos, que desaparecem. Restam agora o numerador 2 e o denominador 5, que fazem dois quintos, que é o produto da multiplicação.

Operação

$$\frac{3}{7} \times \frac{7}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

Demonstração. Se multiplicarmos $\frac{3}{7} \times \frac{7}{5} \times \frac{2}{3}$ desprezando o cancelamento, teremos o produto $\frac{42}{105}$, fração que simplificada ficará também $\frac{2}{5}$. Ora, a fração $\frac{42}{105}$ tem o numerador 42 composto de 3 × 7 × 2, e o deno-

minador composto de $7 \times 5 \times 3$; portanto, 3 e 7 são fatores comuns a ambos os termos. Já sabemos que dividindo-se o numerador e o denominador por um mesmo número, não se altera o valor da fração (n.° 143). Então cancelando-se os fatores 3 no numerador e 3 no denominador não se altera o valor da fração; o mesmo se dá com o fator 7.

Problema. Multiplicar $\frac{7}{18} \times \frac{6}{14} \times \frac{1}{5}$.

Solução. Podemos dividir o numerador da primeira fração e o denominador da segunda por 7. Então $7 \div 7 = 1$, e $14 \div 7 = 2$; cancelaremos os dois números e escreveremos os quocientes 1 e 2 nos lugares respectivos. Podemos também dividir o numerador da segunda fração e o denominador da primeira por 6; então, $6 \div 6 = 1$ e $18 \div 6 = 3$. Cancelaremos 6 e 18, e poremos nos seus respectivos lugares os quocientes 1 e 3. Agora o numerador é $1 \times 1 \times 1 = 1$, e o denominador é $3 \times 2 \times 5 = 30$. A resposta é um trinta avos.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{3}{\cancel{18}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{2}{\cancel{14}}} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$$

Operar as seguintes multiplicações por meio do cancelamento.

		Respostas
1.	$\frac{7}{8} \times \frac{5}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} \times \frac{3}{7}$.	$\frac{1}{6}$
2.	$\frac{25}{43} \times \frac{18}{25} \times \frac{43}{65} \times \frac{4}{18}$.	$\frac{4}{65}$
3.	$\frac{18}{26} \times \frac{13}{36} \times \frac{3}{4}$.	$\frac{3}{16}$
4.	$\frac{7}{22} \times \frac{11}{21} \times \frac{42}{14}$.	$\frac{11}{42}$
5.	$\frac{25}{39} \times \frac{8}{15} \times \frac{39}{50}$.	$\frac{4}{15}$
6.	$\frac{14}{10} \times \frac{15}{20} \times \frac{11}{17} \times \frac{17}{22}$.	$\frac{21}{40}$

		Respostas
7.	$\frac{3}{7} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \frac{4}{5}$.	?
8	$\frac{18}{20} \times \frac{5}{9} \times \frac{11}{13} \times \frac{13}{22}$.	?
9	$\frac{15}{40} \times \frac{17}{45} \times \frac{15}{34} \times \frac{3}{4}$.	?
10	$\frac{21}{24} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{3} \times \frac{6}{10}$.	?
11.	$\frac{13}{20} \times \frac{5}{26} \times \frac{3}{9} \times \frac{12}{16}$.	?
12.	$\frac{25}{100} \times \frac{8}{29} \times \frac{3}{12} \times \frac{15}{26}$.	?

Dividir frações

159. Na divisão das frações há três casos para considerar, que são:

1° Dividir uma fração por número inteiro.
2° Dividir um número inteiro por uma fração.
3° Dividir uma fração por outra fração.

1° Caso. Problema. Dividir $\frac{6}{8}$ por 3.

Solução. Esta operação tem por fim dividir 6 oitavos em 3 partes iguais; dividindo 6 oitavos por 3, o quociente é $\frac{2}{8}$ ou $\frac{1}{4}$.

Não se podendo dividir exatamente o numerador de uma fração pelo divisor, multiplica-se o denominador pelo divisor, e obtém-se o mesmo resultado, que é $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$, (Vêde n.° 143).

Operação

$$\frac{6}{8} \div 3 = \frac{6 \div 3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{6}{8} \div 3 = \frac{6}{8 \times 3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

Para operar uma divisão sôbre frações, temos as seguintes

Regras: I. *Se o divisor é um número inteiro e divide exatamente o numerador da fração opera-se a divisão, e escreve-se*

o quociente sôbre o denominador. Se não divide exatamente o numerador, multiplica-se o denominador pelo inteiro, e escreve-se o produto debaixo do numerador.

Operar as seguintes divisões:

		Respostas			Respostas			Respostas
1.	$\frac{4}{5} \div 4 =$.	$\frac{1}{5}$	4.	$\frac{7}{9} \div 6 =$	?	7.	$3\frac{2}{13} \div 2 =$	?
2.	$\frac{7}{8} \div 5 =$.	$\frac{7}{40}$	5.	$3\frac{2}{3} \div 7 =$.	?	8.	$\frac{33}{44} \div 9 =$.	?
3.	$4\frac{4}{5} \div 8 =$.	$\frac{3}{5}$	6.	$9\frac{5}{6} \div 5 =$.	?	9.	$\frac{25}{45} \div 3 =$.	?

2° Caso. Problema. Qual é o quociente de 6 dividido por $\frac{2}{3}$?

Solução. Dividir 6 por $\frac{2}{3}$ é dividir 6 pela terça parte de 2. Isto se consegue multiplicando 6 por 3 e dividindo depois o produto por 2; o resultado, que é 9, será o quociente. Ora, como 2 é o numerador e 3 é o denominador, temos a seguinte regra:

$$6 \div \frac{2}{3} = \frac{6 \times 3}{2} = 9$$

II. *Quando o dividendo é número inteiro, multiplica-se o inteiro pelo denominador da fração, e o produto divide-se pelo numerador.*

Ilustração. Se dividirmos um número inteiro por outro inteiro, o quociente será sempre menor do que o dividendo; mas, se o dividirmos por uma fração, o quociente será sempre maior do que o dividendo, como vemos no problema do segundo caso.

Para compreender êste resultado, notaremos que o quociente mostra quantas vezes o divisor está contido no dividendo. Se dividirmos 6 por 2 o quociente será 3, porque 6 contém 3 vezes 2; se dividirmos 6 por 1, o quociente será 6, porque 6 contém 6 vezes 1; se dividirmos 6 por $\frac{1}{2}$ o quociente será 12, porque 6 contém 12 meios, etc.

Quando o divisor fôr menor do que a unidade, o quociente será maior do que o dividendo.

3° Caso. Problema. Qual é o quociente de $\frac{3}{4}$ divididos por $\frac{2}{5}$?

Solução. Invertendo os termos do divisor, temos $\frac{5}{2}$; multiplicando agora as duas frações, temos $1\frac{7}{8}$, que é o quociente.

Operação

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = ?$$

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$$

Demonstração. Dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$ quer dizer dividir $\frac{3}{4}$ pela quinta parte de 2, o que se obtém, dividindo-se $\frac{3}{4}$ por 2, e multiplicando-se o resultado por 5. Ora, multiplicando-se o denominador de $\frac{3}{4}$ por 2 divide-se a fração por 2 (n.° 143), e multiplicando-se o numerador por 5, multiplica-se a fração por 5, e tem-se como resultado $\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$. Ora o multiplicador $\frac{5}{2}$ é justamente o divisor $\frac{2}{5}$ invertido.

III. *Quando são duas frações, invertem-se os termos da fração divisora, depois multiplicam-se as duas frações; e o produto será o quociente da divisão.*

Nota. Apresentamos a exposição de cada um dos três casos da divisão de frações para os alunos compreenderem a teoria analítica destes processos, na prática, porém, estes três casos ficam reduzidos a um só: pois dando ao número inteiro o denominador 1, como $4 = \frac{4}{1}$; reduzidos os números mistos a frações impróprias, como $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$, todos os casos expostos se reduzem a uma simples divisão de duas frações, na qual se invertem os termos do divsor, e se multiplicam depois as duas frações, como

$$4 \div \frac{2}{3} = \frac{4}{1} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{3} \div \frac{4}{1} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$8\tfrac{1}{2} \div 2\tfrac{1}{3} = \frac{17}{2} \div \frac{7}{3} = \frac{17}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{51}{14} = 3\tfrac{9}{14}$$

Operar as seguintes divisões:

		Respostas			Respostas
1.	$\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{4}$.	3	**9.**	$\frac{4}{6}$ por $\frac{2}{3}$.	?
2.	$\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{4}$.	2	**10.**	$\frac{7}{9}$ por $\frac{1}{5}$.	?
3.	$\frac{5}{6}$ por $\frac{2}{3}$.	$1\frac{1}{4}$	**11.**	$\frac{2}{10}$ por $\frac{3}{7}$.	?
4.	$\frac{3}{12}$ por $\frac{7}{9}$.	$\frac{9}{28}$	**12.**	$2\frac{1}{4}$ por $7\frac{1}{2}$.	?
5.	$2\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{16}$.	40	**13.**	$\frac{2}{3}$ por $5\frac{1}{8}$.	¿
6.	$4\frac{1}{2}$ por $1\frac{1}{3}$.	$3\frac{3}{8}$	**14.**	$\frac{7}{9}$ por 8	?
7.	$4\frac{3}{4}$ por $5\frac{1}{8}$.	$\frac{38}{41}$	**15.**	$4\frac{3}{5}$ por $2\frac{2}{7}$.	?
8.	$\frac{5}{8}$ por $2\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{4}$	**16.**	$8\frac{2}{5}$ por $\frac{1}{3}$.	?

17. Dividir $\frac{3}{5} + \frac{5}{6}$ por $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$. Resp. $10\frac{3}{4}$

18. Dividir $6\frac{1}{2} - 1\frac{1}{5}$ por $2\frac{1}{2} + 1$. » ?

19. Dividir $5 + 6\frac{3}{4}$ por $2\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$. » ?

20. Dividir $8\frac{1}{3} + 6$ por $7\frac{2}{3} - 5$. » ?

Fração de fração

160. Dá-se o nome de fração de fração a uma ou mais partes de uma fração, como $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$, que se lê: *um meio de um quarto.*

Assim como a unidade pode ser dividida em partes iguais chamadas frações, estas partes podem também ser subdivididas em muitas outras partes menores, chamadas frações de frações.

Ilustração. Se dividirmos um queijo de Minas em 4 partes iguais, cada uma destas partes será um quarto do queijo; se dividirmos depois um dêstes quartos em duas partes iguais, cada uma destas partes será um meio do quarto ou um oitavo do queijo inteiro; portanto $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ é igual a $\frac{1}{8}$ de um inteiro.

Problema. Achar $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$.

Solução. Multiplicando entre si as duas frações, temos como resultado $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Demonstração. Um terço de $\frac{3}{4}$ é $\frac{1}{4}$, porque um têrço de 3 é 1; então 2 têrços de $\frac{3}{4}$ são 2 vezes $\frac{1}{4}$ que são $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Operação

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Para achar uma fração de outra, temos a seguinte

Regra: *Multiplicam-se as duas frações; o produto será a resposta.*

Nota. Para achar uma fração de um número misto, reduziremos o número misto a uma fração imprópria e procederemos conforme a regra.

Para achar uma fração de um número inteiro, escreveremos o inteiro em forma de fração com o denominador 1, e seguiremos a regra.

	Exercícios	Respostas		Exercícios	Respostas
1.	Achar $\frac{1}{8}$ de $\frac{5}{7}$	$\frac{5}{56}$	7.	Achar $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{7}$	?
2.	Achar $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$	8.	Achar $\frac{4}{5}$ de $\frac{10}{20}$.	?
3.	Achar $\frac{2}{5}$ de 3.	$1\frac{1}{5}$	9.	Achar $\frac{3}{4}$ de 8.	?
4.	Achar $\frac{3}{7}$ de 12.	$5\frac{1}{7}$	10.	Achar $\frac{1}{2}$ de $9\frac{3}{4}$.	?
5.	Achar $\frac{2}{5}$ de $7\frac{1}{2}$	3	11.	Achar $\frac{1}{7}$ de 20.	?
6.	Achar $\frac{2}{7}$ de $8\frac{3}{5}$	$2\frac{16}{35}$	12.	Achar $\frac{7}{9}$ de $\frac{1}{9}$.	?

Frações compostas

161. Fração composta é aquela que, em algum dos seus termos ou em ambos, tem uma fração ou um número misto.

Uma fração composta é a indicação de uma divisão, na qual o numerador é o dividendo, o denominador é o divisor, e se requer o quociente em uma fração simples.

Problema. Reduzir $\dfrac{2\frac{2}{3}}{4\frac{4}{5}}$ a uma fração simples.

Solução. Temos de dividir $2\frac{2}{3}$ por $4\frac{4}{5}$. Os dois números mistos, reduzidos a frações, dão $\frac{8}{3} \div \frac{24}{5}$. Invertendo os termos do divisor, e operando a multiplicação, temos $\frac{5}{9}$.

$$2\frac{2}{3} \div 4\frac{4}{5} = \frac{8}{3} \div \frac{24}{5} = ?$$

$$\frac{8}{3} \times \frac{5}{24} = \frac{40}{72} = \frac{5}{9}.$$

Para reduzir uma fração composta a uma fração simples, temos a seguinte.

Regra: *Divide-se o numerador pelo denominador; o quociente será a fração simples.*

Reduzir as seguintes frações compostas a frações simples:

1. $\frac{\frac{6}{7}}{\frac{11}{5}}$. Resp. $\frac{30}{77}$
2. $\frac{\frac{2}{3}}{5}$. » $\frac{2}{15}$
3. $\frac{2}{3\frac{2}{3}}$. » $\frac{6}{11}$
4. $\frac{4\frac{1}{8}}{4\frac{5}{7}}$. Resp. ?
5. $\frac{3\frac{2}{4}}{5\frac{3}{4}}$. » ?
6. $\frac{8}{\frac{3}{4}}$. » ?
7. $\frac{\frac{2}{5}}{9}$. Resp. ?
8. $\frac{7\frac{1}{2}}{8\frac{1}{4}}$. » ?
9. $\frac{15\frac{1}{4}}{30\frac{1}{2}}$. » ?

Expressões fracionárias

162. Muitas vezes precisamos calcular o valor de uma expressão aritmética em forma de fração em cujos termos aparecem números ligados pelas operações já conhecidas.

Neste caso ainda devemos calcular as operações indicadas no numerador e separadamente as indicadas no denominador e dividir o primeiro resultado pelo segundo.

Problema. Juntando-se 15 ao quociente de 35 por 7 e dividindo-se o resultado por 11 menos 6, que número se obterá?

Solução. Temos de dividir 35 por 7, o que dá 5; somando 5 com 15, achamos 20 que dividiremos por 11 — 6, isto é, por 5. Então 20 ÷ 5 = 4, que é o resultado da expressão dada.

Fórmula

$$\frac{(35 \div 7) + 15}{11 - 6} = 4$$

Para resolver uma expressão fracionária temos a seguinte

Regra: *Efetuam-se todas as operações indicadas no dividendo e no divisor, e depois divide-se o resultado do dividendo pelo resultado do divisor.*

Achar o resultado das seguintes expressões:

1. $\dfrac{(8 \times 30) - 40}{40 + 10} =$ Resp. 4

2. $\dfrac{6 + 12 - 3}{5} =$ » 3

3. $\dfrac{25 - 15 + 98}{6 \times 2}$ » 9

4. $\dfrac{(10 \times 8) + 20}{100 - 80} =$ Resp. ?

5. $\dfrac{7 \times 3 - (8 + 3)}{2 \times 5} =$ » ?

6. $\dfrac{30 + 9 - 4}{90 - 36} =$ » ?

Resolver os seguintes problemas sôbre frações:

1. Dividir a soma de $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{3}{20}$ pela diferença que há entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ .... Resp. $14\frac{2}{3}$

2. Reduzir $\frac{32989}{56981}$ à expressão mais simples .. Resp. $\frac{11}{19}$

3. Dividir $\frac{3}{5}$ por $\frac{3}{4}$ e depois dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{3}{5}$, e somar os dois quocientes .... Resp. $2\frac{1}{20}$

4. Multiplicar $\frac{5+3}{20-4}$ por $\frac{6+3}{5 \times 2}$ .... Resp. $\frac{1}{10}$

5. Dividir $\frac{5}{18}$ de $\frac{2}{5}$ por $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{3}$ .... Resp. $\frac{4}{9}$

6. Multiplicar $\dfrac{1\frac{1}{2}}{2\frac{1}{3}}$ por $\dfrac{\frac{3}{7}}{4\frac{1}{2}}$ .... Resp. $\frac{3}{49}$

7. Dividir $\dfrac{1\frac{2}{3}}{2\frac{1}{2}}$ por $\dfrac{5\frac{1}{7}}{\frac{24}{77}}$ .... Resp. $\frac{4}{99}$

8. Quanto é $\frac{5}{12}$ de 8? .... Resp. $3\frac{1}{3}$

9. Dividir $\frac{3}{5}$ de $\frac{8}{9}$ por $\frac{6}{7}$ de $\frac{3}{4}$ .... Resp. $\frac{112}{135}$

10. Somando $35\frac{3}{4}$ e $23\frac{5}{8}$, e subtraindo depois $8\frac{1}{2}$, que resto ficará? .... Resp. $50\frac{7}{8}$

FRAÇÕES DECIMAIS

163. Quando a unidade está dividida na razão décupla, isto é, em dez partes iguais ou potências de dez, como cem, mil, dez mil, etc., estas partes da unidade teem o nome de **frações decimais.**

Ilustração. Estas frações receberam o nome de decimais, porque neste sistema, a unidade se divide em 10 partes iguais, cada uma destas partes se divide em outras 10 partes iguais, que são as frações imediatamente inferiores e assim por diante, como vemos na exposição seguinte:

A unidade divide-se em 10 décimos;
o décimo divide-se em 10 centésimos;

o céntesimo divide-se em 10 milésimos.
o milésimo divide-se em 10 décimos milésimos;
o décimo milésimo divide-se em 10 centésimos milésimos;
o centésimo milésimo divide-se em 10 milionésimos, etc.

164. A fração decimal escreve-se ao lado direito do número inteiro, separada por uma vírgula, que se chama **vírgula decimal,** como

2,5 que se lê: *dois e cinco décimos.*

Quando a fração decimal não está unida a um número inteiro, anda sempre precedida por uma cifra, como

0,5 que se lê: *cinco décimos.*
0,12 que se lê: *doze centésimos.*

Esta cifra não tem valor algum, e indica simplesmente que o número que segue é uma fração decimal.

165. Unidades fracionárias decimais. As unidades fracionárias decimais teem a seguinte ordem da esquerda para a direita depois da vírgula decimal:

Os décimos ocupam a 1ª ordem; os centésimos ocupam a 2ª ordem; os milésimos ocupam a 3ª ordem; os décimos milésimos, a 4ª, e assim por diante, como se vê na tabela que está ao lado. Cada ordem é dez vezes menor do que a precedente.

		1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	
Número inteiro	**Vírgula decimal**	Décimos	Centésimos	Milésmos	Décimos milésimos ...	Centésimos milésimos.	Milionésimos	
0	,	7	5	4	3	8	2	..

166. As frações decimais diferem das frações ordinárias em dois pontos:

1º A fração ordinária divide a unidade em 2, 3, 4, 5 ou qualquer outro número de partes iguais, como meios, terços, quartos, quintos, etc. E a fração decimal divide a unidade só em 10 partes iguais ou potências de 10. Estas partes chamam-se décimos, centesimos, milésimos, segundo fôr o seu número 10, 100, 1000, etc.

2º A fração ordinária tem sempre o denominador expresso, e por isso é representada por dois números como $\frac{5}{8}, \frac{15}{19}$. E a fração decimal tem o denominador oculto, quando é escrita com a vírgula decimal, e por isso pode ser representada com um só número como 0,25.

Nota. A fração decimal tem duas formas, uma ordinária, como $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{9}{1000}$, $\frac{17}{10000}$, etc.; e a outra decimal, como 0,3, 0,07 0,009, 0,0017, etc. O denominador de uma fração decimal só está oculto na forma decimal escrita mas é sempre expresso na linguagem falada, porque quando ditamos 0,8 dizemos *oito décimos*, isto é $\frac{8}{10}$ (exprímindo o numerador e o denominador). Desde que a unidade está dividida em décimos, centésimos, milésimos, etc., a fração é sempre considerada decimal, quer tenha a forma ordinária, quer a decimal; pois, em ambos os casos, a fração é sempre expressa oralmente com o seu numérador e denominador, pois de outro modo não poderia ser enunciada com palavras.

167. De dois modos podemos lêr uma fração decimal, a saber:

1º Modo. Lê-se a fração decimal como um número inteiro, acrescentando-se-lhe o nome da última ordem da fração, como 0,725 que se lê: *725 milésimos*.

2º Modo. Enuncia-se o número e o nome de cada ordem da fração, como 0,725 que se lê: *7 décimos, 2 centésimos e 5 milésimos*. O primeiro modo é o que deve ser praticado.

168. Quando as primeiras ordens de uma fração decimal não teem algarismos significativos, os seus lugares são ocupados por cifras.

Ilustração. No primeiro exemplo, como não há décimos, esta ordem é ocupada por uma cifra. No segundo exemplo, como não há décimos nem centésimos, os seus lugares são ocupados por cifras. No terceiro, como há só décimos milésimos, são as demais ordens ocupadas por cifras.

Exemplos

Cinco centésimos	0,05
Cinco milésimos	0,005
Cinco décimos milésimos	0,0005

Os discípulos devem lêr as seguintes frações, e depois o professor ditará estas ou outras para êles escreverem na pedra.

1.	0,2	(2 décimos)	**7.**	0,99.	?	**13.**	2,050.	?
2.	0,8	(8 décimos)	**8.**	0,650.	?	**14.**	8,750.	?
3.	0,15	(15 centésimos)	**9.**	0,705.	?	**15.**	4,0055.	?
4.	0,025	(25 milésimos)	**10.**	0,080.	?	**16.**	3.1250.	?
5.	0,508	(508 milésimos)	**11.**	0,0005.	?	**17.**	6,0185.	?
6.	0,56	(56 centésimos)	**12.**	0,3006.	?	**18.**	2.050.	?

O discípulo escreverá com algarismos as seguintes frações:

1.	35 centésimos.	**6.**	6 décimos.	**11.**	158 décimos milésimos.
2.	9 décimos.	**7.**	15 centésimos.	**12.**	108 décimos milésimos:
3.	3 centésimos.	**8.**	19 centésimos.	**13.**	850 céntesimos milésimos.
4.	5 milésimos.	**9.**	55 centésimos.	**14.**	1590 centèsimos milésimos.
5.	80 milésimos:	**10.**	19 milésimos.	**15.**	500 milionèsimos.

Reduzir decimais à mesma denominação

169. Quando duas ou mais frações decimais teem número igual de algarismos, são da mesma denominação; assim 0,25, 0,50 e 0,08 são da mesma denominação, porque todas elas teem o nome de centésimos; mas quando teem um número desigual de algarismos, são de diferentes denominações; assim 0,5, 0,22 e 0,125 são de diferentes denominações, porque a primeira se denomina décimos; a segunda, centésimos, e a terceira, milésimos.

170. A redução de frações decimais à mesma denominação é baseada nos dois princípios seguintes:

1° Se prefixarmos uma cifra a 0,2 (2 décimos) esta fração ficará sendo 0,02 (2 centésimos), que é a sua décima parte, porque o algarismo 2 passa da ordem dos décimos para a dos centésimos; se ainda prefixarmos outra cifra, a fração ficará sendo 0,002 (2 milésimos), que é a sua centésima parte.

2° Se acrescentarmos uma ou mais cifras a uma fração decimal, não lhe alteraremos o valor porque estas cifras vão ocupar as casas finais, sem lhes dar valor algum. Assim, acrescentando uma cifra a 0,2 ficará 0,20; acrescentando duas cifras ficará 0,200; ora dois décimos, vinte centésimos e duzentos milésimos são frações equivalentes.

Inteiros	Décimos	Centésimos	Milésimos
0,	2		
0,	0	2	
0,	0	0	2
0,	2		
0,	2	0	
0,	2	0	0

Nota. Prefixar um algarismo a um número é escrever o algarismo antes do número, e acrescentar um algarismo a um número é escrevê-lo no fim do número; de sorte que prefixando 5 ao número 9, fica 59 e acrescentando 5 ao número 9, fica 95.

Para reduzir frações decimais à mesma denominação, temos a seguinte

Regra: *Iguala-se em todas as frações o número de algarismos, acrescentando-se-lhes cifras.*

Problema. Reduzir 0,5, 0,15, 0,04, e 0,125 à mesma denominação.

Solução. Igualando com cifras o número de algarismos nas quatro frações, ficam todas com a denominação de milésimos.

0,5 = 0,500
0,15 = 0,150
0,04 = 0,040
0,125 = 0,125

Alteração no valor dos números decimais

171. Um número decimal ficará 10 vezes maior, se afastarmos a vírgula decimal um algarismo para a direita; ficará 100 vezes maior, se a afastarmos dois algarismos; ficará 1000 vezes maior, se a afastarmos três algarismos, e assim por diante.

Demonstração. Se em 200,54 deslocarmos a vírgula um algarismo para a direita, o número ficará 450,05, isto é, 10 vezes maior; porque o número inteiro, que era 45, passou para 450, e a fração, que era de 5 milésimos, passou para 5 centésimos. Se afastarmos dois algarismos, ficará 4500,5 isto é, 100 vezes maior, e assim por diante.

172. Um número decimal ficará reduzido à sua décima parte, se afastarmos a vírgula decimal um algarismo para a esquerda; ficará reduzido à centésima parte, se fôr afastada dois algarismos; será reduzido à milésima parte, se fôr afastada três algarismos, e assim por diante.

Demonstração. Se em 200,54 deslocarmos a vírgula um algarismo para a esquerda, o número ficará 20,054, isto é, ficará na sua décima parte, porque o número inteiro, que era 200 passou para 20, e a fração que era 54 centésimos, passou para 54 milésimos. Se deslocarmos dois algarismos, o número ficará 2,0054, isto é, na sua centésima parte.

Se prefixarmos uma cifra a uma fração decimal reduzi-la-emos à sua décima parte; se prefixarmos duas cifras, reduzi-la-emos à sua centésima parte, etc., como 0,75; 0,075; 0,0075.

Regra: *Para se tornar um número decimal dez, cem ou mil vezes maior, afasta-se a vírgula decimal um, dois ou três algarismos para a direita; e para o reduzir à décima, centésima ou milésima parte, adianta-se a vírgula decimal um, dois ou três algarismos para a esquerda.*

Operar os seguintes exercícios de aplicação:

		Respostas
1.	Tornar o número 54,375 cem vezes maior.	5437,5
2.	Reduzir o número 54,375 à centésima parte.	0,54375
3.	Reduzir o número 8540,5 à decima parte.	854,05
4.	Tornar a fração 0,55 cem vezes maior.	55
5.	Reduzir a fração 0,55 à centésima parte.	0,0055
6.	Reduzir o número 7,5 à milésima parte.	0,0075

Transformar frações decimais em frações ordinárias

173. As frações decimais podem ser facilmente transformadas em frações ordinárias, e estas podem igualmente ser transformadas em decimais.

174. A fração decimal tem na escrita um denominador oculto, que pode ser expresso por 1 seguido de tantas cifras quantos forem os algarismos da fração decimal. Assim

$$0{,}5 = \tfrac{5}{10} \qquad 0{,}001 = \tfrac{001}{1000} = \tfrac{1}{1000}$$

$$0{,}25 = \tfrac{25}{100} \qquad 0{,}015 = \tfrac{015}{1000} = \tfrac{15}{1000}$$

Problema. Transformar 0,25 em uma fração ordinária.

Solução. Como esta fração decimal tem dois algarismos, o seu denominador será 100 e a fração resultante será 25 centésimos, que, simplificada, dá um quarto.

$$0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Para transformar uma fração decimal em uma fração ordinária, temos a seguinte

Regra: *Escreve-se a fração decimal sem a virgula, como numerador, e dá-se-lhe como denominador 1 seguido de tantas cifras quantos forem os algarismos decimais da fração, e simplificam-se depois os termos resultantes, se tiverem um divisor comum.*

Nota. Entende-se por algarismos decimais os que têm uma fração decimal, não entrando nesta contagem os algarismos da parte inferior, nem a cifra antes da vírgula; assim 18,15 tem dois algarismos decimais; 0.55 tem dois algarismos decimais; 0,005 tem três algarismos decimais, etc,

Transformar as seguintes frações decimais em frações ordinárias:

1.	0,75	Resp.	$\frac{3}{4}$	**6.**	0,50	Resp.	?	**11.**	0,025	Resp.	?
2.	0,20	»	$\frac{1}{5}$	**7.**	0,58	»	?	**12.**	0,016	»	?
3.	0,125	»	$\frac{1}{8}$	**8.**	0,025	»	?	**13.**	0,03125	»	?
4.	0,375	»	$\frac{3}{8}$	**9.**	0,0625	»	?	**14.**	5,046	»	?
5.	4,050	»	$4\frac{1}{20}$	**10.**	0,325	»	?	**15.**	0,0728	»	?

Transformar frações ordinárias em frações decimais

175. Para que êste ponto fique suficientemente claro, vamos resolver três problemas diversos:

1° Problema. Transformar $\frac{3}{4}$ em uma fração decimal.

Solução. Acrescentando uma cifra ao numerador e dividindo-o pelo denominador, ficam 2 de resto; acrescentando outra cifra ao resto e continuando a divisão, não há mais resto; então, como se acrescentaram duas cifras, separam-se dois algarismos no quociente, e a fração decimal será o quociente 0,75.

Operação

```
30 | 4
20   0,75
 0
```

Demonstração. Três quartos quer dizer 3 dividido por 4. Ora, como não podemos dividir 3 por 4, acrescentâmos uma cifra ao dividendo que ficou sendo 30, isto é, 10 vezes maior. Como a divisão deixou resto acrescentámos ao resto outra cifra, e o dividendo ficou elevado a 300, isto é, 100 vezes maior do que o seu valor. Ora o quociente 75 é também 100 vezes maior do que devia ser; para corrigir êste aumento, reduziremos 75 à sua centésima parte com a vírgula decimal, e ficou sendo $75 \div 100 = 0{,}75$ (Vêde n.° 172).

2° Problema. Transformar $\frac{2}{3}$ em uma fração decimal.

Solução. Acrescentando cifras ao numerador e dividindo-o pelo denominador, o quociente 6 se repete indefinidamente, deixando sempre 2 de resto. A fração $\frac{2}{3}$ não pode ser exatamente expressa por uma decimal.

Neste caso podemos tomar no quociente quantos algarismos quisermos: é só repetir 6.

```
20 | 3
20   0,666
20
 2
```

3° Problema. Transformar $\frac{1}{25}$ em uma fração decimal.

Solução. Neste processo, acrescentamos duas cifras ao numerador e separamos dois algarismos no quociente; mas como êle não tem senão um, teremos de prefixar-lhe uma cifra para igualar o numero e a fração decimal será 0,04 (4 centésimos).

```
100 | 25
100   0,04
---
000
```

Para transformar frações ordinárias em decimais, temos a seguinte

Regra: *Acrescentam-se cifras ao numerador; divide-se depois pelo denominador, e no quociente separam-se com a vírgula decimal tantos algarismos decimais, quantas forem as cifras acrescentadas. Se os algarismos não chegarem, prefixam-se-lhes cifras.*

Transformar as seguintes frações ordinárias em decimais:

1.	$\frac{4}{5}$	Resp.	0,8	**6.**	$\frac{1}{4}$	Resp.	?	**11.**	$\frac{2}{125}$	Resp.	?
2.	$\frac{3}{4}$	»	0,75	**7.**	$\frac{5}{20}$	»	?	**12.**	$\frac{13}{40}$	»	?
3.	$\frac{4}{25}$	»	0,16	**8.**	$\frac{1}{400}$	»	?	**13.**	$\frac{23}{500}$	»	?
4.	$\frac{3}{40}$	»	0,075	**9.**	$\frac{3}{250}$	»	?	**14.**	$\frac{17}{24}$	»	?
5.	$8\frac{7}{50}$	»	8,14	**10.**	$5\frac{23}{500}$	»	?	**15.**	$\frac{3}{350}$	»	?

Adição decimal

176. Como a adição de números decimais se opera do mesmo modo que a de números inteiros, não é necessário dar mais esclarecimentos além da regra.

Regra: *Para se somarem frações decimais, escrevem-se as diferentes parcelas umas debaixo das outras, de sorte que*

os algarismos da mesma ordem fiquem em coluna. Somam-se todas as parcelas, como se fossem números inteiros, e escreve-se a vírgula decimal na soma.

Problema. Qual é a soma de 0,25, 0,50 e 0,75?

Solução. Somando as três frações, achamos que o resultado é 1.50, isto é, 1 inteiro e 50 centésimos.

Demonstração. 25 centésimos mais 50 centésimos, mais 75 centésimos somam 150 centésimos. Ora, como um inteiro tem 100 centésimos, segue-se que 150 centésimos fazem 1.50 ou $1\frac{1}{2}$. Se transformarmos estas frações decimais em ordinárias, obteremos o mesmo resultado, pois $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$.

Operação

0,25
0,50
0,75
1,50

Somar os seguintes exercícios:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	(6.)
0,2	0,75	0,005	4,55	8,125	10,15
0,7	0,06	0,0015	2,05	2,008	12,01
0,15	0,75	0,1450	1,08	3,25	13,15
0,75	0,155	0,3005	0,80	0,800	14,25
0,02	0,16	0,437	5,125	5,012	15,50
0,08	0,001	0,11	3,02	3,120	19,05
1,90			16,625		

7. Somar 0,75 + 0,075 + 0,0075. Resp. 0,8325

8. Somar 41,35 + 25,005 + 18,555. " ?

9. Somar 8 décimos, 55 centésimos, 13 milésimos e 155 décimos milésimos. Resp. 1,3785

Subtração decimal

177. Regra: *Para se subtrair uma fração decimal de outra, reduzem-se ambas à mesma denominação, escreve-se o subtraendo debaixo do minuendo, e opera-se como em números inteiros, e escreve-se a vírgula decimal no resto.*

Nota. Se o minuendo fôr um número inteiro, acrescente-se-lhe a vírgula decimal e tantas cifras quantos forem os algarismos da fração do subtraendo.

Problema. Subtraindo 0,25 de 0,75, quanto resta?

Solução. Escrevendo o subtraendo debaixo do minuendo e operando a subtração, teremos 0,50 de resto.

Demonstração. De 75 centésimos subtraindo 25 centésimos, restam 50 centésimos, fração igual a $\frac{1}{2}$. Se transformarmos as frações decimais em ordinárias, teremos o mesmo resultado.

Operação

0,75
0,25
0,50

Problema. De 15 subtrair 8,75

Solução. Pondo a vírgula decimal no minuendo e acrescentando-lhe duas cifras, não lhe alteraremos o valor, porque as cifras vão ocupar duas casas decimais sem lhes dar valor algum. O resto da subtração é 6,25.

15, = 15,00
8,75 = 8,75
6,25

Operar as seguintes subtrações:

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	(6.)
Minuendo	0,125	0,005	0,040	4,008	15,85	18,01
Subtraendo	0,005	0,002	0,025	2,750	7,015	15,70
Resto						

7. De 24,0042 subtrair 13,7013. Resp. 10,3029
8. De 170,0035 tirar 68,00181. " 102,00169
9. De 0,0142 tirar 0,005. " 0,0092
10. De 0,5 subtrair 0,0024. " 0,4976
11. De 13,5 subtrair 8,037. " 5,463
12. De 3 tirar 0,00003. " 2,99997
13. De um inteiro tirar um milionésimo. " 0,999999
14. De 25 milésimos tirar 25 milionésimos. " 0,024975

Multiplicação decimal

178. Regra: *Para se multiplicarem decimais, escreve-se o multiplicador debaixo do multiplicando, e opera-se a multiplicação, como se os dois fatores fossem números inteiros, e, no produto, separam-se com a vírgula tantas ordens quantos algarismos decimais contiverem ambos os fatores; se o produto não tiver número suficiente, prefixam-se-lhe cifras para igualar o número.*

Problema. Multiplicar 37 inteiros por 0,5.

Solução. Multiplicando 37 por 0,5 como se os dois fatores fossem números inteiros, teremos o produto 185. Ora, como há um algarismo decimal no multiplicador, separa-se com a vírgula um algarismo decimal no produto que ficará sendo 18,5, isto é, 18 inteiros e 5 decimos.

Operação

37
0,5
18,5

Demonstração. Multiplicando 37 por 5 inteiros, o produto é 185 inteiros; ora o multiplicador não é 5 inteiros, mas 5 décimos, que são a décima parte de 5; então o produto deve ser também a décima parte de 185. Para reduzirmos êste número à sua décima parte, basta dividí-lo por 10, separando com a vírgula um algarismo à direita do número, e teremos 18,5 (Vêde n.º 172).

Problema. Qual é o produto de 0,25 multiplicado por 0,15?

Solução. Multiplicando os dois fatores como números inteiros, o produto é 375. Ora, como há 4 algarismos decimais nos dois fatores, separam-se também 4 no produto; como 375 só tem 3 casas, prefixa-se-lhe uma cifra para completar o número, e ficará 0,0375.

Demonstração. Multiplicando 0,25 por 15 inteiros, o produto é 375 centésimos, que são 3,75, isto é, 3 inteiros e 75 centésimos. Mas o multiplicador é 0,15 que são a centésima parte de 15; então, o produto 3,75 deve ser reduzido à sua centésima parte, o que se faz dividindo-o por 100, com a vírgula decimal. Se tivéssemos de dividir 3,75 por 10, ficaria 0,375, mas como o temos de dividir por 100, êle ficará 0,0375 (Vêde n.º **172**).

Operação

```
  0,25
  0,15
 -----
  1 25
  2 5
 ------
0,0375
```

179. Para se multiplicar uma fração decimal por 10, 100, 1000, etc., bastará afastar a vírgula decimal para a direita, tantos algarismos quantas forem as cifras do multiplicador, como se vê nos seguintes exemplos:

$0,4325 \times 10 = 4,325$ | $0,4325 \times 1000 = 432,5$

$0,4325 \times 100 = 43,25$ | $0,4325 \times 10000 = 4325$

Resolver as seguintes multiplicações:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0,135	0,152	0,756	8,520	4,56	18,15
0,005	0,089	0,845	0,025	2,16	7,05
0,000675					

7.	Multiplicar 19 por 0,125.	Resp. 2,375
8.	Multiplicar 4,5 por 4.	" 18
9.	Multiplicar 0,625 por 64.	" 40
10.	Multiplicar 61,76 por 0,0071.	" 0,438496
11.	Multiplicar 1,325 por 0,716.	" 0,9487
12.	Multiplicar 79000 por 0,079.	" 6241
13.	Multiplicar 1 decimo por um centésimo.	" 0,001
14.	Multiplicar 4000 por um milionésimo.	" 0,004

Divisão decimal

180. Na divisão decimal há dois casos que temos de considerar:

1º Quando o dividendo e o divisor teem número igual de algarismos decimais.

2º Quando não teem número igual de algarismos decimais.

1° Caso. Regra: *Quando o dividendo e o divisor teem número igual de algarismos decimais, opera-se como em números inteiros, e o quociente será também número inteiro.*

Problema. Dividir 0,75 por 0,15.

Solução. Como o dividendo e o divisor teem número igual de algarismos decimais, opera-se como em números inteiros. Neste problema o quociente é 5; isto é, 75 centésimos conteem 5 vezes 15 centésimos.

Operação

```
0,75 | 0,15
 75    5
  0
```

181. 2° Caso. Regra: *Se o dividendo tiver menor número de algarismos decimais que o divisor, iguala-se o número com cifras; se tiver maior número, separam-se no quociente tantos algarismos decimais, quantos houver de diferença; se o quociente não tiver algarismos suficientes, prefixam-se-lhe cifras.*

1° Problema. Dividir 17,5 por 0,25.

Solução. Como o dividendo tem menos um algarismo decimal do que o divisor, iguala-se o número com uma cifra no que não se altera o valor do dividendo, porque 0,5 = 0,50. Opera-se depois como em números inteiros. O quociente é 70 inteiros.

```
17.50 | 0.25
17.5    70
00,0
```

2. Problema. Dividir 0,5625 por 0,125.

Solução. Quando o divisor tem menos algarismos decimais do que o dividendo, iguala-se o número, separando no quociente com a vírgula os algarismos que faltarem para igualar o número. Ora, o dividendo tem quatro, e o divisor tem três; separa-se com a vírgula um algarismo no quociente, o qual ficará 4,5 (4 inteiros e 5 décimos).

```
0,5625 | 0,125
 500     4,5
 625
 625
 000
```

Demonstração. Nos dois problemas que resolvemos na multiplicação decimal, demonstramos que o produto deve ter tantos algarismos decimais como os dois fatores que o produziram. Ora, o dividendo 0,5625 é um produto composto dos dois fatores denominados divisor e quociente; se pois o divisor 0,125 não tiver tantos algarismos decimais como o dividendo 0,5625, devem ser separados no quociente os que faltarem para completar o número.

3. Problema. Dividir 0,0075 por 0,15.

Solução. Efetuada a divisão, o quociente é 5, mas como o dividendo tem quatro decimais, e o divisor tem só dois, apartaremos dois algarismos no quociente, e como êste tem só um algarismo, prefixa-se-lhe uma cifra e ficará 0,05 (cinco centésimos).

```
0,0075 | 0,15
    75   0,05
    00
```

182. Para dividirmos um número decimal por 10, 100, 1000, etc., bastará afastarmos a vírgula para a esquerda tantos alga-

rismos, quantas forem as cifras do divisor, como se vê nos exemplos seguintes:

835,5 ÷ 10 = 83,55	835,5 ÷ 1000 = 0,8355
835,5 ÷ 100 = 8,355	835,5 ÷ 10000 = 0,08355

Operar as seguintes divisões:

		Respostas			Respostas
1.	86,075 ÷ 27,5.	3,13	**11.**	32,4 ÷ 1,8.	?
2.	24,73704 ÷ 3,44.	7,191	**12.**	2,56 ÷ 0,64.	?
3.	37,41 ÷ 10.	3,741	**13.**	0,288 ÷ 0,036.	?
4.	206,166492 ÷ 4,123.	50,004	**14.**	82,5 ÷ 2,75.	?
5.	100,8788 ÷ 454.	0,2222	**15.**	62,5 ÷ 0,025.	?
6.	0,000343 ÷ 3,43.	0,0001	**16.**	9 ÷ 0,45.	?
7.	9,9 ÷ 0,0225.	440	**17.**	4,53 ÷ 0,0302.	?
8.	0,21318 ÷ 0,19.	1,122	**18.**	0,3 ÷ 0,0125.	?
9.	2,10 ÷ 0,3.	7	**19.**	0,625 ÷ 12,5.	?
10.	85,25 ÷ 100.	0,8525	**20.**	0,0256 ÷ 0,32.	?

Frações periódicas

183. Na redução de frações ordinárias a frações **decimais**, podemos obter um dos três resultados seguintes:

1.° Se reduzirmos $\frac{4}{5}$ a uma fração decimal, o resultado **será** 0,8 (oito décimos). Como esta decimal proveio de uma **divisão** exata, e exprime exatamente o valor da fração **ordinária, tem** o nome de **decimal exata.**

2.° Se reduzirmos $\frac{3}{37}$ a uma fração decimal, o resultado **será** 0,081081... isto é, o período 081 repetido **indefinidamente, sem** nunca atingir ao valor exato de $\frac{3}{37}$ Dêstes períodos **repetidos a** fração recebeu o nome de **decimal periódica simples.**

Os períodos podem constar de um só algarismo, **como** em 0,3333..., podem constar de dois, como em 0,2727...; podem, enfim, constar de três ou mais, como veremos adiante.

3.° Se reduzirmos $\frac{5}{6}$ a uma fração decimal, o resultado será 0,8333..., isto é, 8 que não pertence à parte periódica, e os períodos 3, 3, 3... Daqui lhe veio o nome de **decimal periódica composta.**

184. Na redução de frações ordinárias a decimais, podemos, portanto, obter como resultado uma decimal exata ou uma decimal periódica simples ou uma decimal periódica composta.

Decimal exata é a que provém de uma divisão exata, e que exprime exatamente o valor da fração ordinária que lhe corresponde.

Decimal periódica simples é a que consta de periodos que se repetem indefinidamente, porque a fração procede de uma divisão continuada que deixa sempre resto.

Decimal periódica composta é a que, além dos periodos, tem ainda uma parte não periódica.

185. Se uma fração ordinária estiver reduzida à sua expressão mais simples, por meio dos três principios seguintes poderemos determinar de antemão qual das três decimais ela produzirá:

1° *Quando o denominador de uma fração irredutível contiver na sua composição sòmente os fatores primos 2 ou 5, ou ambos, uma ou mais vezes, produzirá uma* **decimal exata.**

Demonstração. No processo da redução, acrescentamos cifras ao numerador, e dêste modo fica êle terminado em cifra; ora todo número terminado em cifra, é divisível por 2 e por 5; e se houver resto nas primeiras divisões, continuando a acrescentar cifras, obteremos afinal uma divisão exata, como nos seguintes exemplos:

$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{3}{4} = \frac{3}{2 \times 2} = 0{,}75$	$\frac{3}{25} = \frac{3}{5 \times 5} = 0{,}12$
$\frac{1}{5} = 0{,}2$	$\frac{9}{10} = \frac{9}{2 \times 5} = 0{,}9$	$\frac{7}{20} = \frac{7}{2 \times 2 \times 5} = 0{,}35$
$\frac{3}{5} = 0{,}6$	$\frac{7}{8} = \frac{7}{2 \times 2 \times 2} = 0{,}875$	$\frac{9}{50} = \frac{9}{2 \times 5 \times 5} = 0{,}18$

2° *Quando o denominador de uma fração irredutível não contiver na sua composição os fatores primos 2 ou 5, dará uma fração* **periódica simples.**

Demonstração. Não entrando na formação do denominador os fatores 2 ou 5, então só entrarão os fatores 3, 7, 9, 11, 13, ou outros fatores primos maiores. No processo da redução, acrescentamos em cada divisão uma cifra ao numerador, e todo número terminado em cifra, dividido por êsses fatores, deixa sempre um resto que se repete em periodos indefinidamente, como vemos nos seguintes exemplos:

$\frac{1}{3} \;.\;\;.\;\;. = 0,\dot{3}333\ldots$	$\frac{1}{11} = 0,\dot{0}\dot{9}09\ldots$
$\frac{2}{9} = \frac{2}{3 \times 3} = 0,\dot{2}222\ldots$	$\frac{1}{13} = 0,\dot{0}\dot{7}\dot{6}\dot{9}\dot{2}\dot{3}076923\ldots$
$\frac{4}{27} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3} = 0,\dot{1}\dot{4}\dot{8}148\ldots$	$\frac{1}{7} = 0,\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}142857\ldots$

Os pontos mostram os algarismos que pertencem a um periodo.

3° *Quando o denominador de uma fração irredutível contiver na sua formação os fatores 2 ou 5 com outros fatores primos, dará uma* **decimal periódica composta.**

Demonstração. Os denominadores que contêm 2 ou 5 e outros fatores primos, são, por exemplo, $2 \times 3 = 6$; $2 \times 5 \times 3 = 30$; $5 \times 7 = 35$; $3 \times 5 = 15$; $5 \times 5 \times 3 = 75$, etc. Os fatores 2 e 5 produzem a parte não periódica, e os outros fatores primos produzem a parte periodica, como vemos nos seguintes exemplos:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2 \times 3} = 0,1666..$$

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{3 \times 5} = 0,0666..$$

$$\frac{7}{30} = \frac{7}{2 \times 3 \times 5} = 0,2333..$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{2 \times 2 \times 3} = 0,08333..$$

Exercício oral de aplicação. O discípulo, lendo as seguintes frações ordinárias, poderá dizer fàcilmente quais são as que produzem decimais exatas e quais as que produzem decimais, periódicas, simples ou compostas.

1. $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{13}$.
2. $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{5}{17}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{9}{19}$, $\frac{3}{22}$, $\frac{6}{21}$, $\frac{9}{22}$, $\frac{22}{23}$.

Achar a geratriz de uma periódica simples

186. Fração geratriz de uma periódica é fração ordinária que, reduzida a uma decimal, produz essa periódica.

Ilustração. A regra que já apresentamos para transformar frações decimais em ordinárias, tem perfeita aplicação nas **decimais exatas,** mas se a aplicarmos também às **periódicas,** obteremos uma fração ordinária de um valor muito aproximado, mas não a mesma que produziu a fração periódica. Se transformarmos, por exemplo, $\frac{3}{11}$ em uma fração decimal, obteremos 0,2727 . . . Se considerarmos dois períodos, despresando os demais, obteremos $\frac{2727}{10000}$. Ora a fração $\frac{2727}{10000}$ é irredutivel menor do que $\frac{3}{11}$. Precisamos, portanto, saber achar a fração geratriz de 0,2727 . . .

Regra: *Para se achar a fração geratriz de uma periódica simples, toma-se por numerador um dos periodos, e por denominador tantos noves, quantos forem os algarismos de um periodo e simplifica-se a fração resultante, se fôr redutivel.*

1.° Problema. Achar a fração geratriz de 0,2727...

Solução. Tomando um período como numerador, temos 27, e como êste período tem dois algarismos, escrevem-se dois noves como denominador, e a fração resultante é $\frac{72}{99}$ que reduzida dá $\frac{3}{11}$.

$$0,2727... = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

Demonstração. Se na fração 0,2727 . . . afastarmos a vírgula dois algarismos para a esquerda, ela ficará 27,27 . . . isto é, cem vezes maior, por-

que 0,27, que eram centésimos, passaram para 27 inteiros; o outro período, que era 27 décimos milésimos, passou para 27 centésimos, e assim sucessivamente. Como os períodos se sucedem indefinidamente, podemos escrever 27,2727. Subtraindo dêste número uma vez a fração 0,2727, teremos sòmente 27 inteiros, isto é, 99 vezes a fração. Dividindo 27 por 99, teremos agora a fração reduzida ao seu valor real, que é $\frac{27}{99} = \frac{3}{11}$.

$$\begin{array}{r} 27,2727 \\ 0,2727 \\ \hline 27, \end{array}$$

$$\frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

Problema. Achar a geratriz de 0,8333...

Solução. Cada período constando de um só algarismo, que é 3, e o denominador sendo 9, a fração geratriz deve ser $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$$0{,}333\ldots = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Achar a geratriz das seguintes periódicas simples:

1.	0,4444...	Resp. $\frac{4}{9}$		**6.**	0,0101...	Resp. ?
2.	0,0303...	» $\frac{1}{33}$		**7.**	0,729729...	» ?
3.	0,2323...	» $\frac{23}{99}$		**8.**	0,534534...	» ?
4.	0,1111...	» $\frac{1}{9}$		**9.**	0,6666...	» ?
5.	0,5454...	» $\frac{6}{11}$		**10.**	0,7272...	» ?

Achar a geratriz de uma periódica composta

187. Regra. *Para se achar a geratriz de uma periódica composta, toma-se como numerador a parte não periódica seguida do primeiro período, e subtrai-se do número que resulta a parte não periódica.*

Como denominador escrevem-se tantos noves, quantos forem os algarismos de um período, e juntam-se a êles tantas cifras, quantos forem os algarismos da parte não periódica, e simplifica-se a fração resultante, se fôr redutível.

Problema. Achar a geratriz de 0,8333...

Solução. A parte não periódica é 8, a qual unida com o primeiro período, que é 3, faz 83. Subtraindo-se dêste número a parte não periódica ficará 83 — 8 = 75, que é o numerador.

$$0{,}8333\ldots = \frac{83-8}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}.$$

Como o período consta de um só algarismo, escreve-se um nove como denominador, e, como a parte não periódica consta de um só algarismo, junta-se ao 9 uma cifra, e a geratriz será $\frac{75}{90} = \frac{5}{6}$.

Demonstração. A parte não periódica são 8 décimos da unidade, e os períodos são frações dêsses décimos; ora, como vimos na solução precedente, estas frações teem como numerador um período, e como denominador

tantos noves quantos algarismos contém um período. Dêste modo, **0,8333... =**
$= \frac{8\frac{3}{9}}{10}$ que simplificada dá $\frac{75}{90} = \frac{5}{6}$. Ou, como formula a regra:

$$\frac{83-8}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$$

Problema. Achar a geratriz de 0,477272 ..

Solução. $0,477272\ldots = \frac{4772-47}{9900} = \frac{4725}{9900} = \frac{21}{44}$.

Achar a geratriz das seguintes periódicas compostas:

1. 0,2333...	Resp.	$\frac{7}{30}$	**6.** 0,91666...	Resp.	?
2. 0,0222...	»	$\frac{1}{45}$	**7.** 0,00435435...	»	?
3. 0,8333...	»	$\frac{5}{6}$	**8.** 0,2666..	»	?
4. 0,5833...	»	$\frac{7}{12}$	**9.** 0,8333...	»	?
5. 0,1454545...	»	$\frac{8}{55}$	**10.** 0,13111...	»	?

SISTEMA MÉTRICO

188. O sistema de pesos e medidas denominado **Sistema Métrico** foi adotado no Brasil pela lei n.° 1.157, de 26 de Junho de 1862, e posto em execução em todo o territorio brasileiro a 1 de Junho de 1873. Desde então cessou o antigo sistema de pesos e medidas, e começou o uso obrigatório do novo sistema, que é agora o único legal.

Noção histórica. Por longos anos, a França reconheceu a imperfeição e inconveniência do seu antigo sistema de pesos e medidas, porque em muitos lugares, elas não só variavam de tamanho, mas até de nome e de divisões, o que dava lugar a fraudes e a mil dificuldades e embaraços para o comércio.

O Govêrno francês, por muitas vezes, desejou estabelecer uma uniformidade, e regular todas as medidas por aquelas que eram usadas em Paris, mas nada pôde conseguir pelas muitas dificuldades que apareciam. Afinal, em 1790, a Assembléia francesa determinou fazer uma reforma completa nos pesos e medidas, e para isso convidou os govêrnos de algumas nações para cooperarem na organização de um sistema de medidas, que fôsse fácil e simples, e também comum a todas as nações.

A Academia de Ciências de Paris nomeou uma comissão composta de matemáticos franceses para estudar as bases do novo sistema de medidas. Esta comissão, não querendo dar ao sistema que ia organizar um caráter nacional, tomou como base das suas operações a distância do Equador ao Polo do Norte, pelo meridiano de Paris. Delambre e Méchain mediram a distância entre Dunquerque e Barcelona, que são os dois pontos extremos no continente da Europa, seguindo aquele meridiano, e por esta distância, êles calcularam o quadrante da terra, e acharam que tinha 5130740 toesas; e dividindo êste espaço em dez milhões de partes iguais, deram à distancia de uma destas partes o nome de **metro**. De sorte que *o metro tem a décima milionésima parte da distância do Equador ao Pólo.*

Em uma medição mais exata que foi calculada posteriormente, verificou-se que o quarto do meridiano terrestre mede 10001870 metros, e que, por isso, o verdadeiro tamanho do metro deveria ser 1m,000187, mas esta diferença é tão diminuta, que não pode ser pràticamente percebida.

A palavra metro vem do termo grego *metron* que significa medida. Este vocabulo já era usado na composição de outras palavras, como termômetro, cronômetro, barômetro, etc. Este sistema chama-se *métrico*, porque todas as suas medidas teem as dimensões tiradas do metro; chama-se também *decimal*, porque a formação das suas unidades tem por base o número 10, como vemos no exemplo seguinte:

10 milimetros formam um centímetro,
10 centímetros formam um decímetro,
10 decímetros formam um metro,
10 metros formam um decâmetro,
10 decâmetros formam um hectômetro,
10 hectômetros formam um quilômetro,
10 quilometros formam um miriâmetro.

Quasi todas as nações da Europa e da América, reconhecendo a imperfeição e inconveniência das suas medidas antigas, e vendo, ao mesmo tempo, as vantagens e simplicidade do Sistema Métrico, adotaram êste sistema, e proibiram o uso de todos os outros. Na Inglaterra e nos Estados Unidos já o seu uso foi autorizado por lei, e há uma tendência muito pronunciada para se adotar êste Sistema; em poucos anos, portanto, êle será usado universalmente.

Unidades principais do Sistema Métrico

189. As unidades principais do Sistema Métrico Decimal adotadas por lei no Brasil são as seguintes:

Metro, unidade de comprimento.
Metro quadrado, unidade de superfície.
Metro cúbico, unidade de volume.
Litro, unidade de capacidade.
Quilograma, unidade de pêso.

190. Estas unidades chamam-se **principais,** porque todas as outras medidas são os seus múltiplos ou submúltiplos.

Para exprimir os múltiplos das unidades ou medidas principais, foram adotadas as seguintes palavras gregas:

Miria, que significa dez mil.	**10000**
Quilo, que significa mil.	**1000**
Hecto, que significa cem.	**100**
Deca, que significa dez.	**10**

Para exprimir os submúltiplos ou divisões, foram adotados os seguintes prefixos latinos:

Deci, que significa a décima parte.	**0,1**
Centi, que significa a centésima parte.	**0,01**
Mili, que significa a milésima parte.	**0,001**

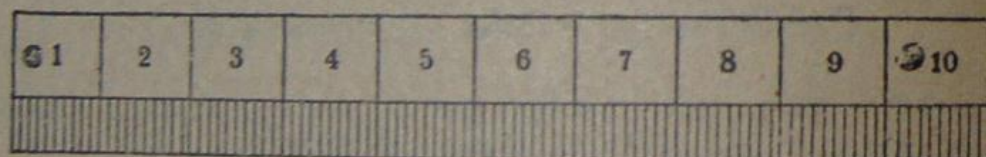
Medidas de comprimento

191. O **metro** tem aproximadamente o comprimento da décima milionésima parte da distância do Equador ao Polo, e é a unidade fundamental do sistema.

O metro divide-se em dez decímetros; o decímetro divide-se em dez centímetros; (*centésimos de um metro*);

O centímetro divide-se em dez milímetros (*milésimos de um metro*).

Nota. A escala seguinte mostra o tamanho exato de um decímetro dividido em dez centímetros, e cada centímetro dividido em dez milímetros:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

O metro tem os seguintes múltiplos:
O decâmetro tem 10 metros (*deca e metro*);
o hectômetro tem 100 metros (*hecto e metro*);
o quilômetro tem 1000 metros (*quilo e metro*);

192. O decâmetro e o hectômetro são unidades pouco usadas. **O quilômetro** (mil metros) é a medida itinerária, isto é, para medir estradas e grandes comprimentos.

193. Usam-se as seguintes abreviaturas para as unidades de comprimento:

km	quilômetro
hm	hectômetro
dam	decâmetro
m	metro
dm	decímetro
cm	centímetro
mm	milímetro.

Medidas de capacidade

194. O **litro** tem a capacidade de decimetro cúbico, isto é, tem a capacidade de um cubo com um decímetro de aresta.

Esta medida serve para medir liquidos, como vinho, azeite, leite, mel, etc. Serve também para medir as substancias secas pulverulentas ou granulosas como farinha, feijão, milho, sal, etc.

Dá-se a esta medida uma forma longa, quando destinada a medir liquidos.

O litro divide-se em dez decilitros (*decimos do litro*);

o decilitro divide-se em dez centilitros (*centésimos do litro*);

o centilitro divide-se em dez mililitros (*milésimos do litro*).

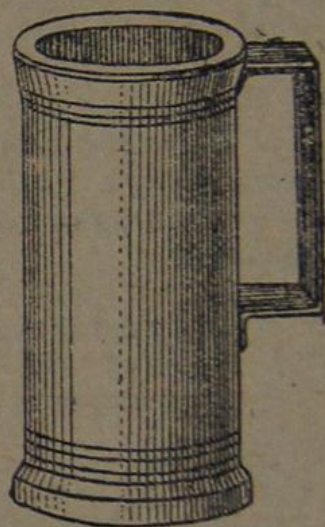
Os multiplos do litro são os seguintes:

O decalitro que tem dez litros (*deca e litro*);

o hectolitro que tem cem litros (*hecto e litro*).

O quilolitro é inteiramente desusado.

195. Para o litro, seus múltiplos e sub-múltiplos, usam-se as seguintes abreviaturas:

kl	quilolitro
hl	hectolitro
dal	decalitro
l	litro
dl	decilitro
cl	centilitro
ml	mililitro

Medidas de pêso

196. O gramo tem o pêso de um centímetro **cúbico** de água distilada na temperatura de quatro graus centigrados.

Nota. A água salgada, a água de certos poços, mesmo a **água** de algumas fontes e, em geral, a água que contém matérias estranhas, pesa mais do que a água que as não tem. Por conseguinte, para se fixar de uma maneira invariável o peso da grama empregou-se água perfeitamente pura, isto é, água distilada.

Sabe-se que dois volumes de água perfeitamente iguais não teem sempre o mesmo peso; por exemplo, um litro de água quente pesa menos do que um litro de água fria. Os físicos teem observado que, na temperatura de 4 graus centígrados, a água tem maior pêso que em qualquer outra temperatura; é isto o que, se chama máxima densidade da água. Um centímetro cúbico de água distilada na temperatura de 4 graus centígrados dá o pêso do grama.

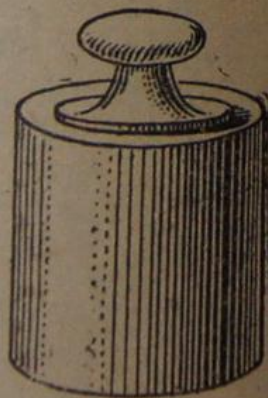
O grama divide-se em dez decigramas (*décimos do grama*);
o decigrama divide-se em dez centigramas (*centesimos do grama*);
o centigrama divide-se em dez miligramas (*milésimos do grama*).

Os múltiplos do grama são os seguintes:
O decagrama que tem dez gramas (*deca e grama*);
o hectograma que tem cem gramas (*hecto e grama*);
o quilograma que tem mil gramas (*quilo e grama*).

Nota. O grama e os seus submúltiplos decigrama, centigrama e milígrama servem para pesar matérias preciosas, como **ouro, prata, diamantes**, etc.; servem também para pesar medicamentos nas farmácias, e para análises químicas. Os múltiplos decagrama e hectograma são **inteiramente desusados**, e, em lugar dêles, diz-se dez gramas, cem gramas.

Nota. A ultima lei brasileira fixando o sistema legal de unidades de medida considerou o **quilograma** como unidade de peso, embora continuasse a tomar o grama para base da formação dos múltiplos e submultiplos.

197. Quilograma. Como o decagrama e o hectograma, múltiplos do grama, são pesos muito pequenos para o uso geral do comercio, tomou-se o quilograma (mil gramas) como unidade para pesar café, açúcar, carne, ferro e todos os outros gêneros que se vendem a peso. As frações do quilograma são sempre expressas em gramas, como: *8 quilogramas e 750 gramas.*

Por abreviatura, diz-se **quilo** em vez de quilograma.

Forma de quilogramo

198. As abreviaturas usadas são:

t	tonelada métrica
kg	quilograma
hg	hectograma
dag	decagrama
g	grama
dg	decigrama
cg	centigrama
mg	miligrama

Como escrever as medidas de extensão, de pêso e de capacidade

199. Como estas medidas têm divisão decimal, os números que exprimem medidas de comprimento, de peso e de capacidade se escrevem do mesmo modo que os números decimais, levando-se em conta a unidade escolhida em cada caso.

200. Medidas de comprimento: As unidades usadas mais frequentemente são o metro e o quilômetro. Deve-se considerar então que

1dm.	corresponde a	0,1m.
1cm.	" "	0,01m.
1mm.	" "	0,001m.

Assim, 8 decímetros são 8 décimos do metro e escrevem-se 0,8m; 5 centímetros são 5 centésimos do metro e escrevem-se 0,05m; 37 milímetros são 37 milésimos do metro e escrevem-se 0,037m.

Si a unidade escolhida para exprimir a medida de comprimento fôr o quilômetro, basta lembrar que cada metro corresponde, então, a um milésimo do quilômetro, isto é 0,001km. De modo que 6 quilômetros e 425 metros escrevem-se: 6,425km; 650 metros escrevem-se 0,650km, etc.

201. Medidas de pêso: Para as medidas de pêso as unidades usadas na prática são o grama e o quilôgrama. Sendo o grama a unidade escolhida, tem-se:

1dg.	corresponde a	0,1g.
1cg.	" "	0,01g.
1mg.	" "	0,001g.

De modo que 9 decigramas escrevem-se 0,9g; 27 centigramas escrevem-se 0,27g; 425 miligramas escrevem-se 0,425g; 3 gramas e 48 miligramas escrevem-se 3,048g.

Si a unidade escolhida para indicar o pêso fôr o quilôgrama é preciso lembrar que cada grama representa um mi-

lésimo do quilograma, isto é, 0,001kg. Então, 728g escrevem-se 0,728kg; 8 quilos e 75 gramas escrevem-se 8,075kg.

202. Medidas de capacidade — A unidade geralmente usada para exprimir medidas de capacidade é o litro. Consideramos então que

1dl	corresponde	a	*0,1l*
1cl	"	"	*0,01l*
1ml	"	"	*0,001l*

Assim, 9 decilitros escrevem-se *0,9l;* 75 centilitros escrevem-se *0,75l;* 4 litros e 758 mililitros escrevem-se 4, 758*l*.

Lêr as seguintes medidas:

1.	50,15m	**6.**	25cm.	**11.**	0,75m	**16.**	35hl
2.	9,05g	**7.**	7dl.	**12.**	0,015g	**17.**	15kl
3.	15,18*l*	**8.**	9dg.	**13.**	0,008m	**18.**	8,250km
4.	8,015g	**9.**	15mg.	**14.**	0,5*l*	**19.**	12,950kg
5.	6,125m	**10.**	20mm.	**15.**	0,105g	**20.**	7,80km

Medidas de superficie

203. A unidade principal de superfície é o metro quadrado, isto é, um quadrado que tem 1 metro de lado.

E' fácil mostrar que êsse quadrado contém 100 quadrados menores com um decímetro de lado. Suponhamos que o quadrado aqui traçado tem um metro de lado e que dividimos cada um dos seus lados em 10 partes iguais. Cada uma destas partes será um decímetro. Si ligarmos os pontos de divisão que se correspondem nos lados opostos, o quadrado ficará dividido em 100 quadrados menores com 1 decímetro de lado. Cada um dêstes se chama **decímetro quadrado.**

Are

O metro quadrado divide-se, portanto, em 100 decimetros quadrados. Do mesmo modo mostrariamos que o decimetro quadrado contém 100 **centímetros quadrado** é que o centimetro quadrado se subdivide em 100 milímetros quadrados.

O metro quadrado tem, por conseguinte, 100×100 ou 10.000 centímetros quadrados e 100 × 100 × 100 ou 1.000.000 de **milimetros quadrados.**

lésimo do quilograma, isto é, 0,001kg. Então, 728g escrevem-se 0,728kg; 8 quilos e 75 gramas escrevem-se 8,075kg.

202. Medidas de capacidade — A unidade geralmente usada para exprimir medidas de capacidade é o litro. Consideramos então que

1dl corresponde a 0,1*l*
1cl " " 0,01*l*
1*ml* " " 0,001*l*

Assim, 9 decilitros escrevem-se 0,9*l;* 75 centilitros escrevem-se 0,75*l;* 4 litros e 758 mililitros escrevem-se 4, 758*l*.

Lêr as seguintes medidas:

1.	50,15m	**6.**	25cm.	**11.**	0,75m	**16.**	35hl
2.	9,05g	**7.**	7dl.	**12.**	0,015g	**17.**	15kl
3.	15,18*l*	**8.**	9dg.	**13.**	0,008m	**18.**	8,250km
4.	8,015g	**9.**	15mg.	**14.**	0,5*l*	**19.**	12,950kg
5.	6,125m	**10.**	20mm.	**15.**	0,105g	**20.**	7,80km

Medidas de superficie

203. A unidade principal de superfície é o metro quadrado, isto é, um quadrado que tem 1 metro de lado.

E' fácil mostrar que êsse quadrado contém 100 quadrados menores com um decímetro de lado. Suponhamos que o quadrado aqui traçado tem um metro de lado e que dividimos cada um dos seus lados em 10 partes iguais. Cada uma destas partes será um decímetro. Si ligarmos os pontos de divisão que se correspondem nos lados opostos, o quadrado ficará dividido em 100 quadrados menores com 1 decímetro de lado. Cada um dêstes se chama **decímetro quadrado.**

Are

O metro quadrado divide-se, portanto, em 100 decimetros quadrados. Do mesmo modo mostraríamos que o decimetro quadrado contém 100 **centímetros quadrado** é que o centímetro quadrado se subdivide em 100 milímetros quadrados.

O metro quadrado tem, por conseguinte, 100×100 ou 10.000 centímetros quadrados e 100 × 100 × 100 ou 1.000.000 de **milímetros quadrados.**

Si passarmos agora aos múltiplos do metro quadrado pode-se mostrar que o **decâmetro quadrado** é igual de 100 metros quadrados, o **hectômetro quadrado** igual a 100 decâmetros quadrados ou 10.000 metros quadrados e que o **quilômetro quadrado** é igual a 100 hectômetros quadrados ou 1000.000 de metros quadrados.

Ha, portanto, entre o metro quadrado e seus múltiplos e submúltiplos, isto é, entre as unidades de área, uma relação centesimal. Quer isto dizer que cada unidade é 100 vezes maior do que a imediatamente inferior ou, o que dá no mesmo, cada unidade é um centésimo da imediatamente superior.

204. Abreviaturas — Para as unidades de área usam-se as seguintes abreviaturas:

km² .... quilômetro quadrado
hm² .... hectômetro quadrado
dam² .... decâmetro quadrado
m² .... metro quadrado
dm² .... decímetro quadrado
cm² .... centímetro quadrado
mm² .... milímetro quadrado.

205. Leitura e escrita de números que exprimem áreas — Para ler e escrever uma medida de superfície é preciso ver qual a unidade escolhida e levar em consideração que

$$1dm^2 = 0,01m^2$$
$$1cm^2 = 0,0001m^2$$
$$1mm^2 = 0,000001m^2$$

Assim, 45dm² são 45 centésimos do metro quadrado e escrevem-se 0,45m²; 368cm² são 368 décimos milésimos do metro quadrado e escrevem-se 0,0368m²; também 50483 milímetros quadrados são 50483 milionésimos do metro quadrado e escrevem-se 0,050483m².

Por outro lado 0,08m² lê-se 8 **decímetros quadrados** porque cada centésimo do metro quadrado é um decímetro quadrado; 0,3547m² lê-se 3547 **centímetros quadrados**; 0,563480m² lê-se 563480 **milímetros quadrados.**

Para as grandes superfícies (regiões, cidades, paises, etc.) usa-se como unidade o quilômetro quadrado. Deve-se levar em conta, neste caso, que o metro quadrado enquivale a um milionésimo do quilômetro quadrado. Assim 3 quilômetros quadrados e 2560 metros quadrados escrevem-se 3,002560km². Por outro lado 4,468500km² lê-se 4 **quilômetros quadrados** 468500 **metros quadrados.**

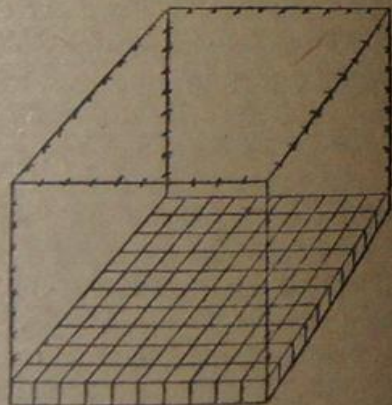
206. Medidas agrárias — Para medidas agrárias, isto é, medição de matas e terras de cultura, usa-se como unidade o decâmetro quadrado com o nome de **are.** O are equivale, portanto, a um quadrado de 10 metros de lado. O único múltiplo do are é o **hectare** com 100 ares e o único submultiplo é o **centiare**, que é a centésima parte do are. O hectare equivale, portanto, ao hectômetro quadrado e o centiare equivale ao metro quadrado. As abreviaturas usadas são:

ha	hectare
a	are
ca	centiare.

Não ha dificuldade na leitura e escrita das medidas agrárias: 3,48ha lê-se 3 hectares e 48 ares; 5,32a lê-se: 5 ares e 32 centiares; 4,0325ha lê-se. 4 hectares e 325 centiares.

Nota. E' necessário que os discípulos compreendam que não há nenhuma medida ou instrumento chamado are, para medir os campos e roças; esta unidade é imaginária, e assinala um espaço ou superfície, para por ela avaliarmos outras superfícies. Se quisermos saber quantos ares tem uma mata, não é com uma peça de 10 metros de comprimento e 10 de largura que temos de fazer a medição; tomaremos as dimensões desta mata, e por meio de um cálculo, acharemos o número de ares que ela tem. No capítulo denominado **Medição**, aprenderemos a medir as superfícies e a calcular os ares que tem um terreno ou campo.

Medidas de volume

207. A unidade principal de volume é o **metro cúbico**, isto é, um cubo que tem um metro de aresta. E' fácil mostrar que esse cubo contém 1.000 cubos menores com 1 decimetro de aresta. Suponhamos que o cubo ao lado tem 1 metro de aresta e que dividimos cada de suas arestas em 10 partes iguais. Si imaginarmos planos passando pelos pontos de divisão que se correspondem nas arestas paralelas, o cubo ficará dividido em 1.000 cubos menores de 1 decimetro de aresta. Cada um destes pequenos cubos é um **decímetro cúbico.** O metro cúbico fica, então, dividido em 1000 decímetros cúbicos.

Do mesmo modo verificaríamos que o **decímetro cúbico** pode ser dividido em 1000 **centímetros cúbicos** e que o centímetro cúbico se subdivide em 1000 **milimetros cúbicos.**

Seria fácil formar os múltiplos do metro cúbicos, mas êles não são empregados na prática.

Vemos, pelo que ficou dito, que ha uma relação milesimal, entre as unidades de volume, isto é, cada unidade é 1000 vezes maior do que a imediatamente inferior ou, o que dá no mesmo, cada unidade de volume é um milésimo da imediatamente superior.

208. Abreviaturas — Para as unidades de volume usam-se as seguintes abreviaturas:

m^3 .... metro cúbico
dm^3 .... decímetro cúbico
cm^3 .... centímetro cúbico
mm^3 .... milímetro cúbico

209. Leitura e escrita das medidas de volume — Para ler e escrever um número que exprime volume, além de atender à unidade escolhida, é preciso considerar que

$$1dm^3 = 0{,}001m^3$$
$$1cm^3 = 0{,}000001m^3$$
$$1mm^3 = 0{,}000000001m^3$$

Então, 584 decímetros cúbicos equivalem a 584 milésimos do metro cúbico e escrevem-se $0{,}584m^3$; 50280 centímetros cúbicos equivalem a 50280 milionésimos do metro cúbico ou $0{,}050280m^3$; 50 milímetros cúbicos são 50 bilionésimos do metro cúbico e escrevem-se $0{,}000000050m^3$.

Por outro lado: $0583m^3$ lê-se 583 **deiímetros cúbicos** porque cada milésimo do metro cúbico vale um decímetro cúbico; 0,00582, lê-se 5820 centímetros cúbicos, e assim por diante.

210. O **estéreo** — O metro cúbico utilizado para medir o volume aparente da lenha chama-se **estéreo** e abrevia-se **st.** Do estéreo se empregam: um múltiplo o **decastéreo (dast)** com 10 estéreos e um submúltiplo — o **decistéreo (dst)**, que é um décimo do estéreo. No Brasil, os volumes ou sólidos, como caixões, fardos, muros, madeiras de construção, aterros, escavações, etc., são avaliadas em metros cúbicos.

A lenha vende-se mais geralmente ás carradas, feixes, centos de achas.

Ler as seguintes medidas:

1.	$36m^2$	**6.**	$0{,}32m^2$	**11.**	3ha	**16.**	$4225cm^3$
2.	$48dm^2$	**7.**	$8{,}000327m^2$	**12.**	4,25a	**17.**	$36mm^3$
3.	$583cm^2$	**8.**	$3{,}42cm^2$	**13.**	7,0326ha	**18.**	85st
4.	$3825mm^2$	**9.**	5a	**14.**	$1{,}425m^3$	**19.**	3dast
5.	$0{,}0456m^2$	**10.**	6ca.	**15.**	$8{,}003648m^3$	**20.**	9dst

Unidade monetária

211. A unidade monetária do Sistema Métrico Decimal é uma moeda de prata denominada **franco,** a qual não foi adotada no Brasil.

212. Já vimos no nº 29 que, desde 5 de Outubro de 1942, é o *cruzeiro* a unidade de moeda no Brasil.

O cruzeiro tem um submúltiplo: o *centavo,* que é a centésima parte do cruzeiro.

O cruzeiro corresponde ao mil réis do antigo sistema (veja pág. 14).

Sempre que se escrever uma importância em dinheiro, isto é, sempre que um número exprimir dinheiro, deve ser precedido do símbolo Cr$.

Desde que já sabemos ler e escrever os números decimais, é muito fácil ler e escrever as importâncias: basta considerar o número de cruzeiros como unidades e o número de centavos como centésimos. No caso de um número exato de cruzeiros, colocam-se dois zeros após a vírgula para exprimir que não há centavos. Exemplos:

2 cruzeiros e 40 centavos	Cr$ 2,40
85 centavos	Cr$ 0,85
5.832 cruzeiros e 70 centavos	Cr$ 5 832,70
45 cruzeiros	Cr$ 45,00

Para se lêr um número que exprima dinheiro, deve-se, então, ler primeiramente a parte inteira acrescentando-se a palavra *cruzeiros* e em seguida ler a parte decimal acrescida da palavra *centavos.* Assim,

Cr$ 5,30 lê-se 5 *cruzeiros* e 30 *centavos.*

Exercícios de aplicação. O aluno lerá as quantias abaixo:

Cr$ 3,00	Cr$ 28,00	Cr$ 700,00	Cr$ 2500,00
Cr$ 5,00	Cr$ 35,00	Cr$ 300,00	Cr$ 3827,00
Cr$ 4,80	Cr$ 40,70	Cr$ 254,30	Cr$ 85439,40
Cr$ 7,50	Cr$ 34,60	Cr$ 483,20	Cr$ 16723,70

213. As operações com as importâncias expressas em cruzeiros e centavos se fazem pelas mesmas regras já estudadas para os números decimais.

Operações sobre quantidades métricas

214. As operações sobre as quantidades métricas seguem a regra das operações sobre decimais.

Problema. Efetuar a soma 15,45m + 8,50m + 16,25m.

Solução. Escrevem-se as três quantidades em coluna, opera-se como se fossem números inteiros, e na soma escreve-se vírgula decimal e a letra inicial da medida. A soma das três quantidades é 40 metros e 20 centímetros. (Vêde n.° **176**).

```
 15,45m
  8,50m
 16,25m
 ------
 40,20m
```

1. Um negociante vendeu de uma peça de pano 8,50m; vendeu mais 7,25m, vendeu depois 4,75m, e ficou um resto de pano com 1,50m; quantos metros tinha a peça ? Resp. ?

2. Somar as seguintes quantidades de vinho : 20,5*l* + + 10,8*l* + 35,7*l* + 20,2*l*. Resp. ?

3. Um anel pesava 20,55g; outro pesava 18,8g e outro pesava 11,37g; qual era o peso dos três aneis ? Resp. ?

4. Qual é a soma de 20,5m + 15,015m + 32,10m + 19,075?

5. Comprei um livro por Cr$ 6,80, um lapis por Cr$ 0,40 e um caderno por Cr$ 0,70. Quanto gastei ? Resp. Cr$ 7,90

215. Problema. De 21,15m tirando 17,75m quanto resta?

Solução. Opera-se a subtração como se os dois termos fossem números inteiros, e no resto escreve-se a vírgula decimal e a letra inicial da medida. O resto é 3 metros e 40 centímetros. (Vêde n.° **177**).

```
 21,15m
 17,75m
 ------
  3,40m
```

1. Um garrafão tinha 9,5*l* de vinagre; tirando-se dêle 5,8*l*, quanto restou ? Resp. ?

2. De uma peça de prata que pesava 82,15g corta-se um pedaço que pesava 35,75g; quanto restou ? Resp. ?

3. De 25 quilos e 400 gramas tirando-se 17 quilos e 750 gramas, quanto resta ? Resp. 7,650 kg

4. Achar a diferença entre 29,90m e 39,80m Resp. ?

5. Um negociante devia ao banco a quantia de Cr$2597,80. Pagou Cr$ 1835,40. Quanto ficou devendo ?

216. Problema. Em quanto importam 25,75m de chita a Cr$ 2,40 cada metro ?

Solução. Opera-se a multiplicação como se fossem números inteiros, e como há dois algarismos decimais no multiplicando, e dois no multiplicador, separam-se quatro algarismos decimais no produto, que ficará 61,80, isto é, Cr$ 61,80. (Vêde n.º 178).

```
    25,75
     2,40
---------
   103000
    51500
---------
  61,8000
```

1. Em quanto importam 15,50m de flanela a Cr$ 3,80 o metro ? Resp. Cr$ 58,90

2. Custando uma grama de platina Cr$ 30,00, quanto devem custar 8,15g ? Resp. ?

3. Quantos metros de fazenda teem 9 peças, tendo cada uma 75,25m ? Resp. ?

4. Se um litro de azeite custa Cr$ 6,80, quanto devem custar 8,5*l* ? Resp. ?

217. Problema. Dividir 25,75m em 5 partes iguais.

Solução. Como no dividendo há dois algarismos decimais apartam-se também dois no quociente, que ficará 5,15, isto é, 5m,15. (Vêde n.º 201).

```
25,75 | 5
 025    5,15
   0
```

1. Comprei 25,75m de seda por Cr$ 988,80; quanto me custou cada metro ? Resp. Cr$ 38,40

2. Comprei 7,5*l* de vinho por Cr$ 22,50; quanto me custou cada litro ? Resp. ?

3. Doze colheres iguais de prata pesaram 194,88g; quanto deverá pesar cada uma ? Resp. ?

4. Comprei 2,85m de nobreza por Cr$ 206,80; quanto me custou cada metro ? Resp. ?

SISTEMA INGLÊS DE MEDIDAS

218. E' obrigatório no Brasil o uso do Sistema Métrico Decimal. Todavia, a própria lei que mais recentemente confirmou essa obrigatoriedade (Decreto N.º 4257, de 16 de Junho de 1939) manda que seja tolerada a indicação em unidades diferentes das legais nas mercadorias importadas e destinadas à exportação. Como temos relações comerciais de grande vulto com os dois países que não aderiram ao Sistema Métrico Decimal (Inglaterra e Estados Unidos da America do Norte), devemos conhecer ao menos as unidades mais usuais do Sistema Inglês de Medidas. Citaremos as seguintes acompanhadas da equivalência nas unidades legais:

UNIDADES DE COMPRIMENTO

NOME INGLÊS	EM PORTUGUÊS	ABREVIATURAS	VALOR APROXIMADO
Inch	Polegada	in	2,54cm.
Foot = 12in.	Pé	ft	0,304m.
Yard = 3ft	Jarda	yd	0,914m.
Fathom = 2yd	Braça	fath	1,828m.
Mile = 880fath	Milha inglesa	mi	1,609m.

Nota. Não se deve confundir a milha inglesa com a milha marítima que mede 1852m.

UNIDADES DE CAPACIDADE

Gallon	Galão (inglês)	gal	4,545 *l.*
Gallon	Galão (americano)	gal	3,785 *l.*

UNIDADES DE PESO

Ounce	Onça	oz	23,35g.
Pound = 16oz	Libra	lb	453g.
Hundredweight = 112*lb*	Quintal inglês	cwt	50,8kg.
Ton = 20cwt	Tonelada inglesa	tn	1016kg.

Nota I — Usa-se ainda, principalmente na America do Norte, a tonelada pequena (**short ton**) equivalente a 907 kg.

Nota II — As unidades de peso acima citadas são as principais do sistema **Avoirdupois.** Para a pesagem do ouro e da prata há outras unidades denominadas **Troy,** sendo que a libra Troy corresponde aproximadamente a 373g.

218. Unidades de superfície — Para unidades de superfície, em qualquer sistema usam-se os quadrados construídos sobre as unidades de comprimentos. Por isso, no sistema inglês usam-se:

square inch	Polegada quadrada	sq in	6,45cm²
square foot	Pé quadrado	sq ft	9,29dm²
square yard	Jarda quadrada	sq yd	0,8361m²
square mile	Milha quadrada	sq mi	2,59km² ou 259ha.

Do mesmo modo por que mostrámos ter o metro quadrado 100 decimetros quadrados, mostraríamos que

1sq ft equivale a 144 sq in
1sq yd " a 9 sq ft.

219. Unidades de volume — As unidades de volume são os cubos que têm para aresta cada uma das unidades de extensão. Assim os ingleses empregam:

cubic inch	Polegada cúbica	cu in	16,387cm³
cubic foot	Pé cúbico	cu ft	28.317dm³
cubic yard	Jarda cúbica	cu yd	0,765m³

E' facil ver que assim como verificámos ter o metro cúbico 1000 decimetros cúbicos, poderiamos verificar que

cada cu ft equivale a 1728 cu in
cada cu yd " a 27 cu ft

Como passar de um sistema para outro

220. Vejamos como se pode exprimir no sistema inglês as medidas expressas no sistema decimal e vice-versa.

Medidas de comprimento

Problema I. 91,40m quantas braças são?

Solução. Cada braça inglesa mede 1,828m. Logo, em 91,40m haverá tantas braças quantas vezes 1,828m se contiver em 91,40m, isto é, 91,40 ÷ ÷ 1,828 ou 50 jardas.

Regra: *Para reduzir ao sistema inglês qualquer medida de comprimento expressa no sistema métrico decimal, basta dividir o número que mede o comprimento pelo valor da unidade inglesa no sistema decimal.*

Problema II. 35 jardas quantos metros são?

Solução. Cada jarda mede 0,914m. Logo, 35 jardas medem 35 vezes mais, isto é, 0,914 × 35 ou 31,99m.

Regra: *Para reduzir ao sistema métrico decimal qualquer medida de comprimento expressa no sistema inglês, basta multiplicar o número que mede o comprimento pelo valor da unidade inglesa no sistema decimal.*

Operar as seguintes reduções:

1.	Reduzir 2128m a pés	Resp.	7000ft
2.	Reduzir 219,36m a jardas	"	240yd
3.	Reduzir 1,27m a polegadas	"	50in
4.	Reduzir 28962m a milhas inglesas	"	18mi
5.	O monte Etna tem 3237m de altura; reduzir esta altura a braças	"	$1770 \frac{360}{457}$
6.	Reduzir 120 yd a metros	"	109,68m
7.	Reduzir 75fa a metros	"	137,1m
8.	Reduzir 150 ft a metros	"	45,6m
9.	Reduzir 3mi a metros	"	4827m
10.	Reduzir 8,5mi a metros	"	13.676,5m

Medidas de peso

221. Problema I. Reduzir 30 libras a quilogramas.

Solução. Uma libra inglesa tendo 453 gramas, 30 libras têm 453 × 30 = = 13.590 gramas. Como o quilograma tem 1000 gramas, divide-se por 1000 êste número, separando três algarismos à direita, e tem-se 13,590 kg.

Problema. II. Reduzir 13,590kg a libras inglesas.

Solução. 13,590kg são 13.590 gramas que, divididas por 453, número de gramas que tem uma libra, dão 30 libras. Este problema é justamente o inverso do precedente.

Regra. *Para reduzir ao sistema métrico decimal qualquer peso expresso no sistema inglês, basta multiplicar o número que mede o peso pelo valor da unidade inglesa no sistema decimal.*

Para reduzir ao sistema inglês qualquer peso expresso no sistema métrico decimal, basta dividir o número que mede o peso pelo valor da unidade inglesa no sistema decimal.

Operar as seguintes reduções:

1. Reduzir 50kg a libras inglesas. — Resp. $110 \frac{170}{453}$
2. Reduzir 50 *lb* a quilogramas. — " 22,65kg
3. Quantos quilogramas são 400lb? — " 181,200kg
4. Quantas libras são 230kg? — " $507 \frac{329}{453}$
5. Reduzir 50 toneladas inglesas a quilogramas — " 50800kg
6. Reduzir 42 onças a gramas. — " 980,7g

O ANTIGO SISTEMA BRASILEIRO DE MEDIDAS

Conquanto esteja proibido por lei o uso do antigo sistema brasileiro de medidas, encontram-se ainda hoje, principalmente no interior do país, referências a algumas unidades dêsse sistema. Damos a seguir o nome e equivalência de algumas delas:

Unidades de comprimento.	Légua de sesmaria	6.600 m.
	Braça	2,2m.
	Palmo	22 cm.
	Polegada	2,75cm.
Unidades de capacidade.	Pipa	430 l.
	Canada	2,66 l.
	Alqueire	36,27 l.
Unidades de pêso.	Arroba	14,689 kg.
	Libra	459g.
	Oitava	3,6g.

Para converter qualquer medida de um sistema para outro, adota-se a mesma marcha seguida em relação ao sistema inglês (Vêja N.° 220).

NUMEROS COMPLEXOS

222. Na numeração decimal, a base para a formação das diversas unidades é sempre **dez,** de sorte que 10 unidades inferiores formam uma unidade imediatamente superior; assim 10 unidades simples formam uma dezena; 10 dezenas formam uma centena; 10 centenas formam um milhar, e assim por diante. Nos números complexos, porém, a formação das diversas unidades é inteiramente arbitrária. Tomando, por exemplo, as unidades de pêso no sistema inglês, vemos que 16 onças formam uma libra, 112 libras formam 1 quintal e 20 quintais formam uma tonelada. Cada uma das outras unidades já tem uma formação diversa e tambem variada. Daquí se originou a **numeração complexa** que, não tendo base determinada, forma as unidades de modo irregular e muito variado.

Ilustração. O termo *complexo* quer dizer número expresso com mais de uma espécie de unidades, como *6 anos e 4 meses; 5 braças e 2 palmos*, etc. Dá-se-lhe êste nome para distinguí-lo do incomplexo que exprime uma quantidade com uma só espécie de unidades, como *6 anos, 5 braças*, etc.

O sistema métrico decimal, como tem as suas medidas sujeitas à divisão decimal, dispensa grande parte dos cálculos sôbre complexos, mas como as divisões do tempo, do círculo e de algumas moedas estrangeiras não estão sujeitas ao sistema decimal, é muito conveniente estudarmos esta espécie de numeração para não acharmos dificuldade nas suas operações.

Antes de entrarmos nas diversas operações sôbre complexos, precisamos conhecer com destreza a formação das seguintes unidades:

Unidades de tempo

223. O **tempo** pode ser indicado em séculos, anos, meses, dias, horas, minutos e segundos.

O século	tem	100 anos.	Dia	tem	24 horas.
Ano	"	12 meses.	Hora	"	60 minutos.
Mês	"	30 ou 31 dias.	Minuto	"	60 segundos.
Semana	"	7 dias.			

Além dessas unidades podem ser usadas outras como: o *lustro* (5 anos), o *biênio* (2 anos), o *triênio* (3 anos), *quatriênio* (4 anos), *trimestre* (3 meses) *semestre* (seis meses) etc. O ano comum tem 365 dias e o ano bissexto tem 366; para fins comerciais considera-se o *ano comercial* com 360 dias, isto é, como si tivesse 12 meses de 30 dias. No ano civil de 365 dias os meses têm 30 dias (Abril, Junho, Setembro e Novembro) e 31 dias (Janeiro, Março, Maio, Julho, Agosto, Outubro e Dezembro). Fevereiro tem 28 dias nos anos comuns e 29 nos bissextos.

Nota. O ano é o tempo que a Terra gasta em fazer o seu movimento de translação em torno do sol. A sua duração é de 365 dias, 5 horas, 48 mi-

nutos e 48 segundos, e que é ordinariamente calculada em 365 dias e seis horas. Tendo o ano comum 365 dias e 6 horas, claro está, que no fim de 4 anos, haverá mais um dia suplementar, que se tem de juntar a cada quarto ano, pois 6 horas multiplicadas por 4, dão 24 horas, que são um dia completo.

Os romanos intercalavam êste dia suplementar em cada quarto ano, repetindo o dia 26 de Fevereiro, que entre êles se chamava *sexto calendarum*, e o dia repetido *bis-sexto calendarum*. Daquí veio o nome de **bissexto** dado aos anos que têem 366 dias. Entre nós, êste dia junta-se também no mês de Fevereiro, o qual, no ano comum, têm 28 dias, e no bissexto têm 29.

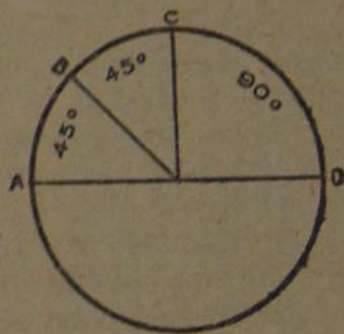
Todo ano bissexto é exatamente divisível por 4, de sorte que para sabermos se um ano é bissexto bastará dividí-lo por 4, se houver resto, será ano comum, e se não o houver, será ano bissexto. Assim os anos de 1876, 1880 e 1884 foram bissextos, e os anos de 1883, 1885 e 1886 foram comuns. Não estão, porém debaixo desta regra os anos centenários, que são os que acabam em duas cifras como 1500, 1700, 1800, etc. Todo ano centenário que fôr exatamente divisível por 400, será ano bissexto. O ano de 1600 foi bissexto e o ano de 1700 foi comum.

Antigamente, o ano começava em Março, em vez de Janeiro, e por isso os meses de Setembro, Outubro, Novembro e Dezembro eram o sétimo, o oitavo, o nono e o décimo mês do ano, como o mostra a sua etimologia latina, 7 *Septum*, 8 *Octo*, 9 *Novem*, 10 *Decem*.

Unidades da divisão do círculo

224. Círculo é a curva plana fechada que tem todos os seus pontos igualmente distantes de um ponto interior chamado centro.

O círculo divide-se em 360 graus; o grau divide-se em 60 minutos, e o minuto em 60 segundos. O sinal de graus é °; o de minutos é ' e o de segundos é ". De sorte que 5.°, 5', 5", lê-se: 5 graus, 5 minutos e 5 segundos.

Ilustração. No círculo ao lado, a distância desde o ponto *A* ao ponto *B* tem 45°; a distância de *A* a *C* tem 45°+45°=90°; e a distância de *A* a *D* pela curva, que é meio círculo, tem 90°+90°=180°.

Unidades da moeda inglesa

225. A unidade principal da moeda inglesa é a libra esterlina que tem a seguinte divisão:

A libra	tem 20 shillings.	(abreviatura £.)
O shilling	tem 12 pence.	(" s.)
O penny	tem 4 farthings.	(" d.)

Nota. **£** é a letra inicial da palavra libra; **s** é a inicial de shilling, que se pronuncia *chilin*; e **d** é a inicial da palavra *denarius* usada antigamente.

O plural de *penny* é *pence*, por isso se diz um penny, dois pence, três pence, etc. Os farthings escrevem-se como frações de um penny; assim as expressões $1\frac{1}{4}$ d, $2\frac{3}{4}$ d, etc., leem-se *um penny e um quarto*, *dois pence e três quartos*.

Na prática indica-se a quantia inglesa com a anotação £ seguida do número de libras esterlinas, de um traço, do número de shillings, de outro traço e finalmente do número de pence. Assim 8 libras esterlinas, 15 shillings e 6 pence, indica-se £ 8-15-6.

Si falta uma das unidades escreve-se um zéro no seu lugar. Assim, 4 libras esterlinas e 10 pence escreve-se £ 4-0-10.

Libra esterlina
(Ouro)

Shilling
(Prata)

Penny
(Cobre)

Redução complexa

226. A redução, em complexos, é o método de mudar a denominação de uma quantidade em outra denominação, sem lhe alterar o valor.

Reduzindo 2 meses a dias, teremos 60 dias; ora, ainda que 2 meses tenham uma denominação diferente de 60 dias, o seu valor é o mesmo.

Antes de entrarmos nas quatro operações sôbre números complexos, é necessário aprendermos primeiro quatro espécies de reduções, que são:

1ª Redução de unidades superiores a unidades inferiores, ou redução descendente.

2ª Redução de unidades inferiores a unidades superiores, ou redução ascendente.

3ª Redução de números complexos a frações ordinárias.

4ª Redução de frações ordinárias a números complexos.

Redução de unidades superiores a unidades inferiores

227. Problema. Quantos dias são 3 anos e 6 meses, dando a cada mês só 30 dias?

Solução. O ano tem 12 meses; 3 anos teem 3 vezes 12, que são 36 meses, com mais os 6 do problema fazem 42.

O mês tendo 30 dias, multiplicaremos 42 por 30, e teremos 1260 dias. Portanto 3 anos e 6 meses são 1.260 dias.

```
12        36 meses
 3         6   »
--        --
36        42   »
          30
        ----
        1260 dias
```

Regra. *Para se reduzirem unidades superiores a unidades inferiores, multiplicam-se as unidades superiores pelo número das unidades inferiores de que são formadas e ao produto junta-se a quantidade de unidades inferiores; assim se passa por todas até chegar a denominação requerida.*

1.	Reduzir 2 horas a segundos.	Resp. 7200 s.
2.	Reduzir 1 dia, 3 horas e 44 minutos a segundos.	" 99840 s.
3.	Reduzir 15 anos a meses	" 180m
4.	Reduzir 2tn e 12cwt a libras	" 5824*lb*
5.	Reduzir 5*lb* e 10oz a onças	" 90oz
6.	Quantas libras tem uma tonelada?	" 2240*lb*
7.	Reduzir 5° 30' a minutos	" 330'
8.	Reduzir 5fath e lyd a polegadas	" 396in
9.	Reduzir £3-5-7 a pence	" 787d
10.	Quantas dúzias são 5 grosas e 10 dúzias?	" 70 dúzias.

Redução de unidades inferiores a unidades superiores

228. Problema. 820 dias quantos anos comerciais são?

Solução. Dividindo 820 dias por 30, que é o número de dias que tem o mês, teremos 27 meses e 10 dias de resto.

Dividindo depois os 27 meses por 12, que é o número de meses que tem o ano, achamos 2 anos e 3 meses de resto. Então 820 dias são 2 anos, 3 meses e 10 dias.

```
820 |_30_      27 |_12_
60    27       24   2 anos
---            --
220             3 meses
210
---
 10 dias
```

Problema. Quantas libras esterlinas são 835 pence?

Solução. Dividindo 835 pence por 12, que é o número de pence que têm um shilling, teremos 69 shillings e 7 pence de resto.

Dividindo depois 69 shillings por 20, que é o número de shillings que têm uma libra, teremos 3 libras e 9 shillings de resto. Então, 835 pence são 3 libras, 9 shillings e 7 pence.

```
835 |_12_      69 |_20_
72    69       60   3
---            --
115             9
108
---
  7
```

Regra: *Para se reduzirem unidades inferiores a unidades superiores, divide-se o número dado pelo número que a unidade imediatamente superior tiver de unidades inferiores. Procede-se do mesmo modo com o quociente obtido, até se chegar às unidades requeridas.*

O último quociente junto com os vários restos será a resposta.

1.	Reduzir 7322 segundos a horas.	Resp.	2h. 2m. e 2s.
2.	Reduzir 4323 minutos a dias.	"	3d. e 3m.
3.	Reduzir 44641 minutos a meses.	"	1mês 1d. e 1m.
4.	Reduzir 5000 libras a toneladas	"	2*tn*. 4cwt. 72*lb*.
5.	Reduzir 347 oz a libras	"	21*lb*. 11*oz*.
6.	Reduzir 244″ a minutos.	"	4′ e 4″
7.	Reduzir 1830′ a graus.	"	30° 30′.
8.	Reduzir 2880 pence a £.	"	£ 12.
9.	Reduzir 749 shillings a £.	"	£ 37-9-0
10.	Quantas jardas inglesas são 4200 polegadas?	"	116yd 2ft.

Redução de números complexos a frações ordinárias

229. Problema. 10 horas e 40 minutos que fração é de um dia?

Solução. 10 horas e 40 minutos são 640 minutos, e tendo um dia 1440 minutos, a fração é $\frac{640}{1440}$, que simplificada fica $\frac{4}{9}$. Portanto 10 h. 40 são $\frac{4}{9}$ de um dia.

$$\frac{\text{Minutos}}{\text{Minutos}} \quad \frac{640}{1440} = \frac{4}{9}$$

Problema. Reduzir 3 quintais e 16 libras a fração da tone-

Solução. 3 quintais e 16 libras são 352 libras, e como a tonelada, tem 2.240 libras, a fração é $\frac{352}{2240}$ ou $\frac{11}{70}$ da tonelada.

$$\frac{\text{Libras}}{\text{Libras}} \quad \frac{352}{2240} = \frac{11}{70}$$

Regra: *Para se reduzir um número complexo a uma fração ordinária, reduz-se o número complexo às suas unidades inferiores; o número que resultar escreve-se como numerador; e o número das mesmas unidades, que tiver a unidade superior, escreve-se como denominador; simplifica-se a fração resultante, se fôr redutível.*

1. Reduzir 7 horas e 30 minutos a fração do dia. Resp. $\frac{5}{16}$
2. Reduzir 10 meses e 5 dias a fração do ano comercial. Resp. $\frac{61}{72}$
3. Reduzir 24 libras a fração do quintal. Resp. $\frac{3}{14}$
4. Reduzir 15 libras e 4 onças a fração do quintal. Resp. $\frac{61}{448}$
5. Reduzir 10 shillings e 6 pence a fração da libra esterlina. Resp. $\frac{21}{40}$
6. Reduzir 2 pés e 4 polegadas a fração da jarda. Resp. $\frac{7}{9}$
7. Quarenta e cinco minutos, que fração é da hora? Resp. $\frac{3}{4}$
8. Dez meses, que fração é do ano? Resp. $\frac{5}{6}$

Reduzir frações ordinárias a números complexos

230. Quantas horas são $\frac{2}{5}$ de um dia?

$$\frac{2}{5} \text{ de } 24 = \frac{48}{5} = 9\tfrac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5} \text{ de } 60 = \frac{180}{5} = 36$$

Solução. O dia tem 24 horas; então $\frac{2}{5}$ de 24 são 9 horas e $\frac{3}{5}$ de uma hora. (N.º **160**). A hora tem 60 minutos, e $\frac{3}{5}$ de 60 minutos são 36 minutos. Portanto $\frac{2}{5}$ de um dia são 9 horas e 36 minutos.

Problema. Exprimir $\frac{3}{4}$ de uma jarda em um número complexo.

$$\frac{3}{4} \text{ de } 3 = \frac{9}{4} = 2\tfrac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \text{ de } 12 = 3$$

Solução. Como uma jarda tem 3 pés, $\frac{3}{4}$ da jarda são $\frac{3}{4}$ de 3 pés ou $2\frac{1}{4}$ pés. Como o pé tem 12 polegadas, $\frac{1}{4}$ de pé é o mesmo que $\frac{1}{4}$ de 12 polegadas ou 3 polegadas. Portanto, $\frac{3}{4}$ da jarda são 2 pés e 3 polegadas.

Regra: *Para se reduzir uma fração ordinária a um número complexo, acham-se quantas unidades imediatamente inferiores contém a unidade da qual se dá a fração, e multiplica-se êsse número pela fração; divide-se depois o numerador pelo denominador, e se houver resto, acha-se o seu valor pelo mesmo processo. Os diversos quocientes formarão o número complexo.*

1. Quantas horas são $\frac{1}{8}$ de um dia? — Resp. 3 horas.
2. $\frac{2}{9}$ de um dia, quantas horas e minutos são? — " 5h. e 20m.
3. Quantas libras são $\frac{3}{4}$ de um quintal? — " 84 libras.
4. Quantas horas e minutos são $\frac{9}{16}$ de um dia? — " 13h. e 30m.
5. Quanto é $\frac{1}{12}$ de uma libra esterlina? — " 1 shil. e 8d.
6. Cinco sextos de um ano, quantos meses são? — " 10 meses.
7. Reduzir $\frac{9}{8}$ de uma libra a onças. — " 18 onças.
8. Três quintos de uma £, quantos shillings são? — " 12 shillings.

Somar números complexos

231. Somar complexos é reunir dois ou mais números complexos em um só número.

Problema. Somar 2 anos, 3 meses e 8 dias; mais 1 ano, 2 meses e 6 dias, mais 3 anos, 6 meses e 5 dias.

Operação

anos,	meses,	dias
2	3	8
1	2	6
3	6	5
6	11	19

Solução. Escrevem-se as parcelas em colunas, e começa-se a adição pelas unidades inferiores que são dias. Então 8 + 6 + 5 = 19 que se escrevem debaixo dos dias. Depois somam-se os meses, que são 3 + 2 + 6 = 11 e que se escrevem debaixo dos meses. Finalmente somam-se os anos que são 2 + 1 + 3 = 6 e que se escrevem debaixo dos anos.

A soma das 3 parcelas é 6 anos, 11 meses e 19 dias.

232. Quando a soma de qualquer das unidades inferiores formar unidades superiores, opera-se do seguinte modo:

Problema. Quero saber quanto somam os seguintes períodos do tempo: 5 anos, 10 meses e 8 dias; 3 anos, 11 meses e 12 dias; 9 anos, 11 meses e 20 dias.

Solução. A soma das unidades inferiores, que são dias, é 8 + 12 + 20 = 40.

Como 40 dias são 1 mês e 10 dias, escreveremos 10 dias debaixo dos dias e passaremos o mês para a coluna dos meses que soma 1 + 10 + 11 + 11 = 33. Ora, como o ano tem 12 mêses, dividiremos 33 por 12, e teremos 2 anos e 9 meses; escreveremos os 9 meses debaixo da coluna dos meses, e passaremos os 2 anos para a coluna dos anos, que soma 19. Portanto as 3 parcelas, somam 19 anos, 9 meses e 10 dias.

Operação

anos,	meses,	dias
5	10	8
3	11	12
9	11	20
19	9	10

Regra: *Escrevem-se todos os números complexos em colunas, de sorte que as unidades da mesma denominação fiquem umas debaixo das outras. Somam-se as unidades inferiores e a soma divide-se pelo número que mostra quantas destas unidades contém a unidade imediatamente superior. Escreve-se o resto debaixo dessa coluna, e o quociente junta-se com a coluna seguinte.*

Procede-se dêste modo com todas as mais colunas e debaixo da última escreve-se a soma inteira dessa coluna.

Nota. Quando algumas destas unidades não tiverem número algum, o seu lugar será ocupado por uma cifra.

Nos números complexos não levaremos para a coluna seguinte 1 em cada 10, como nos números decimais, mas levaremos 1 por cada vez que o número das unidades inferiores contiver a unidade imediatamente superior.

Operar as seguintes adições:

(1.)

Anos,	meses,	dias,	horas.
2	7	20	15
2	8	15	9
5	10	0	5
8	10	2	3
20	0	8	8

(2.)

Anos,	meses,	dias,	horas.
17	3	21	11
0	11	29	3
7	0	15	9
2	7	4	0

(3.)

°	′	″
20	35	49
0	59	0
15	10	30
7	0	50

(4.)

Grosas,	dúzias,	unidades.
5	10	8
2	11	11
8	9	1
7	3	9

(5.)

Libras,	shillings,	pence.
7	11	4
2	10	1
3	10	2
2	14	3
5	0	2
21	6	0

(6.)

£.	s.	d.
8	15	9
3	5	10
5	18	1
7	19	11
2	3	2

7. Comprei em Londres: uma capa por £ 1-13-4, um relógio por £ 7-12-9, um lampeão por £ 2-3-9, e um binóculo por £ 9-8-0. Em quanto importaram estes objetos?

Resp. £20-17-10.

8. Em uma viagem que fiz ao Norte, gastei 2 meses e 20 dias na Baía; um mês e 25 dias em Pernambuco, 18 dias no Pará e 2 meses e 1 dia no Maranhão. Que tempo gastei nesta viagem?

Resp. 7 meses e 4 dias.

9. Quando estive em Londres, gastei na primeira semana £ 3-10-8; na segunda gastei £ 5-1-10; na terceira gastei £ 3-18-11, e na quarta £ 4-15-3. Quanto gastei?

Resp. £ 17-6-8.

Subtrair números complexos

233. A operação de subtrair complexos consiste em tirar um número complexo de outro.

Problema. De 10 anos, 8 meses e 14 dias subtraindo 4 anos, 3 meses e 10 dias, que tempo resta?

Solução. Escreve-se o subtraendo debaixo do minuendo, como nos números decimais, e começa-se a subtração pelas unidades inferiores, que são os dias. Então, de 14 subtraindo 10 restam 4, que se escrevem debaixo. Passa-se depois aos meses, e subtraindo 3 de 8, restam 5. Passa-se finalmente aos anos; subtraindo 4 de 10, restam 6. O resto da subtração é 6 anos, 5 meses e 4 dias.

Operação

Anos,	mêses,	dias
10	8	14
4	3	10
6	5	4

234. Quando algum número do subtraendo é maior do que o correspondente do minuendo, opera-se do seguinte modo:

Problema. De 4 anos, 6 meses e 12 dias, subtraindo 2 anos, 7 meses e 20 dias, quanto resta?

Solução. Como não se pode subtrair 20 de 12, tira-se 1 mês dos 6, e como um mês tem 30 dias, somam-se estes com os 12, e temos 42 dias. Subtraindo agora 20 de 42 restam 22, que se escrevem debaixo da coluna dos dias.

Já tiramos um mês dos 6, por isso restam só 5; como não podemos subtrair 7 de 5, tiraremos 1 ano dos 4, e como um ano tem 12 meses, juntam-se estes com os 5, e formam 17 meses.

Agora subtraindo 7 de 17 restam 10 que se escrevem debaixo dos meses. Como já tirámos 1 ano, restam só 3; subtraindo 2 de 3 resta 1. Portanto o resto da subtração é 1 ano, 10 meses e 22 dias.

Operação

Anos,	meses,	dias.
4	6	12
2	7	20
1	10	22

Regra: *Para se subtrair um número complexo de outro, escreve-se o subtraendo debaixo do minuendo. Começa-se a subtração pelas unidades inferiores, e escreve-se o resto debaixo, como numa subtração simples; mas se um dos termos do minuendo fôr menor do que o respectivo subtraendo, toma-se uma unidade imediata, reduz-se às unidades do termo inferior, e junta-se com elas para formar um novo minuendo, e opera-se então a subtração, e o termo de que se tirou uma unidade será considerado como tendo menos 1.*

Nota. Na subtração decimal, quando o minuendo é menor do que o subtraendo, toma-se uma unidade da casa imediata, que tem sempre 10 unidades da casa inferior. Em complexos, toma-se também uma unidade do termo imediato, mas a unidade que se toma, ora tem mais, ora tem menos de 10 unidades da casa que se quer subtrair. Esta verdade vem da irregularidade da formação das unidades.

Operar as seguintes subtrações:

(1.)

Anos,	meses,	dias.
20	7	15
15	8	7
4	11	8

(2.)

£.	s.	d.
25	7	11
15	15	3

(3.)

Horas,	minutos,	segundos.
20	35	45
18	0	50

(4.)

°	'	"
29	54	53
18	54	59

(5.)

Grosas,	dúzias,	unidades.
15	3	9
11	2	11

(6.)

Anos,	meses	dias.
15	8	15
10	10	14

7. De 5 dias, 10 horas, 27 minutos e 15 segundos subtraindo 2 dias, 4 horas, 13 minutos e 29 segundos, quanto resta?

Resp. 3 dias, 6 h. 13 m. e 46s.

8. Uma pessoa devia £ 16-8-11 e pagando £ 5-10-10 quanto ficou restando?

Resp. £ 10-18-1.

9. Uma barra de ferro pesava 3*tn.* 5*cwt.* 20*lb*; tirou-se um pedaço pesando 1*tn.* 13*cwt.* 7*lb.* Com quanto ficou a barra?

Resp. 1*tn.* 12*cwt.* 13*lb.*

Multiplicar números complexos

235. Multiplicar um complexo por um número é repetir o complexo tantas vezes quantas são as unidades do número.

Problema. Comprei 5 retalhos de seda com 1yd. 2ft. 8in. cada um. Quanto mediam todos os cortes reunidos?

1 yd	2 ft	8 in
		5
9 yd	1 ft	4 in

Solução. Antes de multiplicarmos cada termo do complexo por 5, temos de notar que 12 polegadas formam 1 pé e que 3 pés formam uma jarda. Então $8 \times 5 = 40$ polegadas, que, reduzidas a pés, fazem 3 pés e 4 polegadas. Escrevemos as 4 polegadas debaixo das polegadas e reservaremos os 3 pés para juntar com os pés. Passando agora à multiplicação dos pés, estes, reduzidos a jardas, dão 4 jardas e 1 pé. Escrevemos 1 pé debaixo dos pés e reservamos as 4 jardas para juntar com as jardas. Multiplicando finalmente as jardas, temos $1 \times 5 = 5$ e 4, que vieram dos pés, são 9 jardas que escrevemos debaixo das jardas. Portanto, os 5 retalhos reunidos mediam 9yd. 1ft. 4in.

Regra. *Para multiplicar um complexo por um número escreve-se o multiplicador debaixo do multiplicando, e começando pela direita, multiplica-se cada um dos termos do multiplicando pelo multiplicador.*

Cada produto divide-se pelo número que cada unidade seguinte tem de unidades que se estão multiplicando, e o quociente junta-se com essas unidades, escrevendo o resto debaixo do termo que se multiplicou. A última multiplicação escreve-se inteira debaixo do seu termo.

Operar as seguintes multiplicações:

(1.)

Anos,	meses,	dias.
5	4	8
		6
32	1	18

(2.)

Anos,	meses,	dias.
8	9	5
		7

(3.)

cwt	lb	oz
12	3	3
		9

(4.)

Libras,	shillings,	pence.
8	18	10
		5
44	14	2

(5.)

£.	s.	d.
29	19	11
		8

(6.)

°	'	"
8	40	55
		12

7. Em quanto importam 8 jardas de pano a 8 shillings e 10 pence a jarda? Resp. £ 3-10

8. Qual é o preço de 8 castiçais de prata, pesando 2*lb.* 6*oz* cada uma?

Resp. 19*lb.*

9. Um meteoro percorrendo no espaço 5° 23′ 15″ em um segundo de tempo, que distância percorrerá em 30 segundos?

Resp. 161° 37′ 30″.

10. Achar as parcelas e o total da seguinte conta:

		Shilling	pence	£	s.	d.
15 jardas de sêda preta	a	9	6	7	2	6
18 jardas de velludo azul	a	17	4	.	.	.
12 jardas de brocado escarlate	a	19	8	.	.	.
16 jardas de cambraia de linho	a	3	2	.	.	.
13 jardas de sarja roxa	a	15	6	.	.	.
23 jardas de chamalote carmim	a	6	3	.	.	.

236. Quando o multiplicador é também complexo, **reduz-se cada um dos fatores a fração da unidade principal e opera-se como se fossem números quaisquer.**

Problema. Em quanto importam 5 horas e 45 minutos de vôo de aeroplano sabendo que cada hora custa £ 4 e 8 s.?

Solução. 8 shillings são $\frac{2}{5}$ de uma libra esterlina; 45 minutos são $\frac{3}{4}$ de uma hora. Multiplicando £ $4\frac{2}{5}$ por $5\frac{3}{4}$ teremos como produto £ $\frac{506}{20}$ ou £ $25\frac{6}{20}$. Ora, tendo a libra esterlina 20 shillings, $\frac{6}{20}$ da libra são 6 shillings.

$$5\frac{3}{4} \times 4\frac{2}{5} = \frac{506}{20}$$

$$£\ \frac{506}{20} = £\ 25\text{-}6\text{-}0$$

Resposta: 5 horas e 45 minutos de vôo custam, portanto £ 25-6-0.

Dividir números complexos

237. Em uma divisão complexa, o divisor pode ser **número abstrato ou um número complexo.**

Se o divisor fôr abstrato, a divisão consiste **em dividir um número em partes iguais, e o quociente será um número complexo.**

Se o divisor fôr complexo, a divisão consiste **em achar quantas vezes o divisor está contido no dividendo e neste caso o quociente será um número abstrato.**

Divisor abstrato

238. Problema. A importância de £ 17-3-4 foi distribuida igualmente entre 5 pessoas. Que quantia tocou a cada uma?

£	s	d	÷ 5
17	3	9	
$2 \times 20 =$	40		£ 3 s 8 d 9
	43		
	$3 \times 12 =$	36	
		45	
		0	

Solução. Começaremos a divisão pelas unidades maiores que são libras esterlinas.

Dividindo-se 17 libras por 5 o quociente é 3 libras e ficam 2 libras de resto. Estas 2 libras reduzidas a shillings dão 40 shillings e somados aos 3 shillings do dividendo fazem 43 shillings. Dividindo-se 43 s. por 5 o quociente é 8 shillings e ficam 3 s. de resto. Estes 3s reduzidos a dinheiros dão 36d os quais, somados aos 9d do dividendo fazem 45d. Dividindo-se 45 por 5 acham-se 9d exatamente. O quociente completo é, portanto, £ 3-8-9.

Regra: *Para se efetuar a divisão de um complexo por um número começa-se pelas unidades superiores e, se houver resto, reduz-se a unidades imediatas, para junto com elas entrar na divisão do segundo termo, e assim se continua até o último termo.*

Operar as seguintes divisões:

(1)

Dias, horas, minutos.
9 16 20 | 2

(2)

Dias, horas, minutos.
35 17 59 | 9

(3)

£9, 17s, 8d. | 4

(4)

Jardas, pés, polegadas.
7 1 5 | 5

(5)

Grosas, dúzias, unidades.
19 11 9 | 7

(6)

25° 45' 30" | 13

7. Se um homem gasta £ 257-2-3 em doze meses, quanto gastará por mês? Resp. £ 21-8-6 $\frac{1}{4}$ d.

8. Dividindo-se £ 7256-15-5, igualmente por 500 trabalhadores, que parte receberá cada um? Resp. £ 14-10-3 $\frac{1}{4}$ d.

9. Dividir 12 semanas, 3 dias e 21 horas em 11 partes iguais. Resp. 1 semana, 23 h., 43 m. e 38 $\frac{4}{11}$ s.

Divisor complexo

239. Quando o dividendo e o divisor forem complexos, deverão ser os dois reduzidos a incomplexos da unidade principal.

Problema. — 5yd 2ft de um tecido custam na Inglaterra £ 10-4-0. Qual é o preço de uma jarda dêsse tecido?

Solução. 2ft são $\frac{2}{3}$ de uma jarda; 4 shillings são $\frac{4}{20}$ ou $\frac{1}{5}$ de uma libra esterlina. Dividindo £ $10\frac{1}{5}$ por $5\frac{2}{3}$ teremos para quociente £ $\frac{9}{5}$ ou £ $1\frac{4}{5}$. Ora, tendo a libra esterlina 20 shillings, $\frac{4}{5}$ da libra são 16 shillings. O preço de uma jarda do tecido é, portanto, £ 1-16-0.

$$10\frac{1}{5} \div 5\frac{2}{3} = \frac{9}{5}$$

$$£\,\frac{9}{5} = £\,1\frac{4}{5} = £\,1\text{-}16\text{-}0$$

Si o dividendo e o divisor forem complexos de mesma espécie, podemos reduzir ambos à unidade inferior e operar como números quaisquer.

Problema. Com 15 libras e 12 onças de balas de açúcar quantos pacotes pesando 1 libra e 5 onças se podem fazer?

Solução. 15 *lb* e 12 *oz* são 15 × 16 + 12 onças ou 252 onças; 1 *lb* e 5 *oz* são 16 + 5 = 21 onças. Dividindo 252 por 21 achamos para quociente 22, que é o número de pacotes.

$$15 \times 16 = 240$$
$$240 + 12 = 252$$
$$252 \div 21 = 22$$

Regra. *Reduzem-se o dividendo e o divisor à unidade inferior e opera-se a divisão como em números inteiros.*

1. Com £ 18-4-0 quantos objetos se podem comprar a £ 2-5-6 cada um? Resp. 8

2. Com 9 *cwt* e 9 *lb* de farinha quantos sacos de 2 *lb* e 4 *oz* se podem encher? Resp. 452.

3. Um ângulo medindo 91° 25′ 20″ quantos outros de 5° 42′ 50″ contém? Resp. 16.

4. Em 945 dias, 17 horas, 4 minutos e 12 segundos quantas vezes ha 4 dias, 8 horas, 6 minutos e 54 segundos? Resp. 218

Achar a diferença de tempo entre duas datas, contando anos, meses e dias

240. As operações sôbre complexos teem outras aplicações além das que já foram apresentadas nos vários problemas resolvidos. Podemos achar a diferença de tempo entre duas datas, achar a diferença de longitude entre dois lugares, sabendo-se a diferença de tempo, ou a diferença de tempo, quando se sabe a diferença de longitude, e todos êsses cálculos se efetuam por meio das operações sôbre complexos.

Problema. Que tempo decorreu entre 14 de Abril de 1835, e 12 de Fevereiro de 1837?

Solução. Escreve-se a data mais recente como minuendo, e a data antiga como subtraendo. Os meses escrevem-se na ordem em que êles se sucedem no ano: Janeiro 1, Fevereiro 2, Março 3, etc. Subtrai-se a data antiga da data recente, e o resto é 1 ano, 9 meses e 28 dias, que é o tempo ou diferença entre as duas datas.

Operação

anos,	meses,	dias
1837	2	12
1835	4	14
1	9	28

1. Um homem nasceu a 25 de Novembro de 1807, e seu filho nasceu a 28 de Junho de 1832; qual é a diferença das suas idades? Resp. 24 anos, 7 meses e 3 dias.

2. A independência dos Estados-Unidos realizou-se a 4 de Julho de 1776, e a do Brasil a 7 de Setembro de 1822; que tempo decorreu entre estas duas datas? Resp. 46 anos, 2 m. e 3 dias.

3. O Marquês de Paraná nasceu a 10 de Janeiro de 1800, e morreu a 3 de Setembro de 1856; que idade tinha quando morreu? Resp. 56 anos, 7 m. e 23 dias.

4. O português Fernão de Magalhães saiu de Sevilha a 10 de Agosto de 1519, para procurar o caminho das Indias, morrendo, porém, em viagem; o seu navio, depois de fazer uma volta completa em tôrno da terra, chegou a Sevilha a 7 de Setembro de 1522, sendo esta a primeira viagem que se fez à volta do mundo; que tempo durou esta viagem? Resp. 3 anos e 27 dias.

Achar a diferença de latitude entre dois lugares

241. Chama-se latitude a distância desde o equador a qualquer ponto da terra, e como as terras e os mares se estendem ao norte e ao sul do equador, a latitude divide-se em setentrional e meridional, ou latitude norte e latitude sul.

A distância da latitude marca-se em graus, minutos e segundos, que se começam a contar desde o equador e terminam nos polos, onde a maior latitude mede 90 graus. Se uma cidade está 10 graus distante do equador, e outra está 15 graus do mesmo lado, claro é que há 5 graus de distância entre as duas cidades.

Problema. A latitude de S. Petersburgo é 59° 56′ norte e a de Roma é 41° 54′ norte; qual é a diferença de latitude?

Solução. Escreve-se primeiro a latitude maior, que é a de S. Petersburgo, depois a menor, que é a de Roma, e subtrai-se a menor da maior; o resto, 18° 2′, é a diferença de latitude entre as duas cidades.

Processo

59°	56′
41°	54′
18°	2′

1. O cabo da Boa Esperança está a 33° 55′ 15″ de latitude meridional, e o cabo de Horn está a 55° 58′ 30″ de latitude meridional; qual é a diferença entre estes dois pontos?

Resp. 22° 3′ 15″.

2. Um navio saiu de um porto que estava situado a 10° 15′ 48″ de latitude norte, e chegou a outro que estava a 50°; qual é a diferença de latitude entre os dois portos? Resp. 39° 44′ 12″.

3. O Brasil ocupa o vasto território desde 5° 10′ de latitude setentrional até 33° 45′ de latitude meridional. Achar a diferença entre a sua latitude do norte e a do sul. Resp. 28° 35′.

A longitude e o tempo

242. Longitude. A circunferência da terra divide-se em 360 partes iguais, que se chamam graus de longitude. O lugar de onde se começa contar os graus de longitude chama-se **meridiano inicial.**

Como os diversos países se estendem ao oriente e ao ocidente do meridiano, a longitude divide-se em oriental e ocidental.

A longitude oriental é a distância desde o meridiano inicial até 180 graus ao oriente; e a longitude ocidental é a distância desde o meridiano até 180 graus ao ocidente.

Ilustração. Figurando um círculo máximo que passe pelos polos, cortando perpendicularmente o equador e passando pelo observatório de Greenwich, teremos a idéia do que é o meridiano inicial ou o ponto zero de onde se começam a contar as longitudes.

Algumas nações haviam adotado como inicial, o meridiano da Ilha do Ferro; os franceses adotaram o meridiano de Paris; os alemães adotaram o de Berlim; de sorte que havia grande confusão e divergência nas cartas geográficas das diversas nações. Mas o Congresso Internacional que se efetuou na cidade de Washington em 1885, acabou com esta divergência determinando que o meridiano de Greenwich fosse daquela época em diante o meridiano inicial ou o zero comum de longitude para todas as nações.

Greenwich é um grande arrabalde de Londres, onde está edificado um dos melhores observatórios do mundo. Dista do centro de Londres apenas 10 quilômetros. E' dêste observatório que se começam a contar os graus de longitude.

243. Tempo. A terra faz uma revolução completa sôbre o seu eixo em 24 horas; e como a circunferência da terra se divide em 360 graus, a terra move-se 15 graus em cada hora, porque $360° \div 24 = 15°$.

Desde que a diferença de 15 graus de longitude corresponde a 1 hora ou 60 minutos de tempo, segue-se que 1 grau de lon-

gitude corresponde a $\frac{1}{15}$ de 60 minutos de tempo, que é 4 minutos; e se 4 minutos de tempo correspondem a 1 grau de longitude, 1 minuto de tempo corresponde a $\frac{1}{4}$ de 1 grau, que é 15', isto é, 15 minutos de longitude. Do mesmo modo se pode demonstrar que 1 segundo de tempo corresponde a 15" de longitude. Portanto.

15° de longitude correspondem a uma hora de tempo,
15' de longitude correspondem a um minuto de tempo,
15" de longitude correspondem a um segundo de tempo.

Achar a diferença de hora entre dois lugares, quando é dada a diferença de longitude

244. Quando é meio dia em um lugar, em outro ponto da terra, a 15° ao ocidente, são ainda 11 horas, e em outro lugar a 15° ao oriente é já 1 hora da tarde, porque a terra em 1 hora se move 15°. Daqui resulta a diferença de hora nos diversos lugares do globo. Vamos agora calcular esta diferença.

Problema. A diferença de longitude entre dois lugares é 18 25' 30"; qual é a diferença de hora?

Processo

18° 25' 30" | 15
1 h. 13 m. 42 s.

Solução. Desde que 15° são equivalentes a 1 hora de tempo; 15' equivalentes a 1 minuto de tempo, e 15" a 1 segundo de tempo, segue-se que os graus de longitude, divididos por 15, dão as horas; os minutos de longitude, divididos por 15, dão os minutos de tempo; e os segundos de longitude, divididos por 15, dão os segundos de tempo. Dividindo, pois, a diferença de longitude por 15, obteremos a diferença de hora, que é 1 hora, 13 minutos e 42 segundos.

Regra. *Para se achar a diferença de hora entre dois lugares, divide-se a diferença de longitude por 15, segundo a regra da divisão de complexos, e os termos do quociente correspondentes a ° ' e " indicam horas, minutos e segundos de tempo.*

Nota. Quando as longitudes são semelhantes, isto é, quando ambas estão do mesmo lado do meridiano, acha-se a diferença entre elas subtraindo a menor da maior, como já fizemos com a latitude. Mas quando as longitudes são opostas, isto é, quando uma é oriental e a outra ocidental, como se nota no problema 12, então acha-se a diferença entre elas somando as duas longitudes. Pois, se uma cidade está 3 graus aquém do meridiano, e outra está 2 graus além do mesmo meridiano, claro é que, entre estas cidades, há a distância de 3 + 2 = 5 graus.

Vamos dar a diferença de longitude entre dois lugares para os discípulos calcularem a diferença de hora.

1. 10° 35′.	42m. 20s.	5. 18° 25′ 30″.	1h. 13m. 42s.
2. 9° 20′.	37m. 20s.	6. 56° 36′ 12″.	3h. 46m. 24 $\frac{4}{5}$ s.
3. 16° 14′.	1h. 4m. 56s.	7. 17° 35′ 15″.	1h. 10m. 21s.
4. 77° 1′.	5h. 8m. 4s.	8. 19° 45′.	1h. 1[illegible].

9. A diferença de longitude entre dois lugares é 30°; qual é a diferença de hora? Resp. 2h.

10. A diferença de longitude entre duas cidades é 71° 4′; qual é a diferença de hora? Resp. 4h. 44m. 16s.

11. Uma ilha está situada a 74° 1′ de longitude ocidental, e outra a 75° 10′ de longitude ocidental; qual é a diferença de longitude e de hora entre elas?

Resp. Diferença de longitude 1° 9′.
Diferença de hora 4m. e 36 s.

12. Uma cidade está situada a 20° 30′ de longitude oriental e outra a 9° 30′ de longitude ocidental; qual é a diferença de longitude e de hora entre elas?

Resp. Diferença de longitude 30°.
Diferença de tempo 2h.

13. Quando é meio dia no Rio de Janeiro que horas são em uma cidade a 22° 30′ ao oriente. Resp. 1h. e 30m.

Nota. No problema acima, como a cidade está ao oriente do Rio de Janeiro, junta-se ao meio-dia a diferença de hora entre as duas cidades. Mas se estivesse ao ocidente, subtraía-se do meio-dia a diferença de hora que houvesse entre os dois lugares.

14. Quando é meio dia na cidade de S. Paulo, que horas são daí a 45° 30′ ao ocidente? Resp. 8h. e 58m.

15. O Rio de Janeiro está situado a 43° 10′ 21″ de longitude ocidental, e París a 2° 20′ 29″ de longitude oriental; quando é meio día no Rio de Janeiro, que horas são em París?

Resp. 3h. 2m. e 3 $\frac{1}{3}$ s. da tarde.

Achar a diferença de longitude sendo dada a diferença de hora

245. Sendo dada a diferença de hora entre dois lugares, é fácil achar a diferença de longitude. O processo é o inverso do precedente, multiplica-se o tempo por 15, e no produto trocam-se as iniciais h. m. s. pelos sinais de longitude ° ′ ″.

Problema. A diferença exata de hora entre o Rio de Janeiro e Londres é 2 horas, 52 minutos e 41 $\frac{2}{5}$ segundos; qual é a diferença de longitude entre estas duas cidades?

Solução. Desde que 15° de longitude equivalem a 1 hora de tempo, 15' equivalem a 1 minuto de tempo e 15" a 1 segundo de tempo, a diferença de longitude é igual a 15 vezes a diferença de tempo. Multiplicando, portanto, 2 horas, 52 minutos e 41 $\frac{2}{5}$ segundos por 15, temos a diferença de longitude que 43° 10, 21" .

Processo

2	52	41 $\frac{2}{5}$
		15
43°	10'	21"

O discípulo calculará a diferença de longitude pela diferença de tempo, que é lida em cada problema que segue:

Tempo	Longitude	Tempo	Longitude
1. 1h. 20m.	Resp. 20°.	5. 45m. 50s.	Resp. 11° 27′ 30″.
2. 2h. 10m.	" 32° 30′.	6. 6h. 12m. 24s.	" 93° 6′.
3. 3h. 18m. 12s.	" 49° 33′.	7. 3h. 42m.	" 55° 30′.
4. 5h. 40s.	" 75° 10′.	8. 46m. 50s.	" 11° 42′ 30″.

9. A diferença de hora entre dois lugares é 27 minutos e 20 segundos; qual a diferença de longitude? Resp. 6° 50′.

10. A diferença de hora entre dois lugares é 37 minutos e 20 segundos; qual é a diferença de longitude? Resp. 9° 20′.

11. A diferença de hora entre Londres e Washington é 5 horas, 8 minutos e 1 segundo; qual é a diferença da longitude? Resp. 77° 0′ 15″.

12. Na cidade de Nova York, observou-se um eclipse às 9 horas e 30 minutos da manhã; esse fenômeno foi também observado a bordo de um navio no Oceano Atlântico, às 11 horas e 45 minutos da manhã. ora, sendo a longitude de Nova York 74° ao ocidente, a que longitude estava o navio nessa ocasião? Resp. 40° 15′ Long. oc.

246. Tabela das longitudes de algumas capitais:

CAPITAIS	LONGITUDES	CAPITAIS	LONGITUDES
Londres (mérid. inicial)	0° 0′	Copenhague	12° 34′ E
Lisboa............	9° 8′ O	Constantinopla......	28° 59′ »
Madrid............	3° 43′ »	Jerusalém..........	35° 25′ »
Paris..............	2° 20′ E	Pei-ping	116° 26′ »
Bruxelas..........	4° 20′ »	México............	99° 5′ O
Roma..............	12° 28′ »	Washington........	77° 0′ »
Berlim............	13° 24′ »	Buenos-Aires......	58° 20′ »
Viena..............	16° 23′ »	Tóquio (Japão) ...	136° 30′ E
Atenas............	23° 43′ »		

247. Tabela comparativa mostrando as horas em algumas cidades quando é meio-dia no Rio de Janeiro

Lisboa *2 h. 16 m.* da tarde	**Madrid** *2 h. 37 m.* da tarde	**Londres** *2 h. 52m.* da tarde	**París** *3 h. 2 m.* da tarde
Bruxelas *3 h. 10 m.* da tarde	**Roma** *3 h. 42 m.* da tarde	**Berlim** *3 h. 46 m.* da tarde	**Viena** *3 h. 58 m.* da tarde
Atenas *4 h. 27 m.* da tarde	**Rio de Janeiro** **MEIO-DIA** **Longitude 43° 10′ 21″**		**Constantinopla** *4 h. 48 m.* da tarde
Leninegrado *4 h. 53 m.* da tarde			**Copenhague** *2 h. 2 m.*
Pei-ping *10 h. 38 m.* da noite	**Tóquio** (Japão) Meia-noite	**México** *8h. 48 m.* da manhã	**Washington** *9 h. 45 m.* da manhã
Jerusalém *3 h. 15 m.* da tarde	**Valparaíso** *10 h. 6 m.* da manhã	**Buenos-Aíres** *11 h.* da manhã	**Montevidéu** *11 h. 8 m.* da manhã

Nota I — A letra *h* significa horas, e a letra *m* significa minutos. Omitimos os segundos do tempo para ficar mais simples a comparação.

Nota II — O quadro acima se refere à hora astronômica que é diferente para dois pontos do globo não situados no mesmo meridiano. A hora civil, que é a que marcam os relógios, depende do fuso horario em que está situada a cidade.

RAZÃO

248. Quando comparamos entre si duas quantidades da mesma espécie, o quociente que nos mostra a relação que há entre elas, chama-se **razão.**

Ilustração. Por dois modos diversos podemos comparar entre si duas quantidades. O primeiro é achar quanto uma quantidade excede a outra. Se compararmos, por êste modo, o número 12 com o número 4, acharemos que o número 12 excede 8 o número 4, porque $12 - 4 = 8$. O resultado desta comparação chama-se **diferença.**

O segundo modo de comparar é achar quantas vezes uma quantidade contém a outra. Se compararmos por êste modo o número 12 com o número 4, acharemos que o número 12 contém três vezes o número 4, porque $12 \div 4 = 3$. O resultado desta comparação é o que se chama **razão por quociente** ou, simplesmente **razão.**

As quantidades comparadas devem ser da mesma espécie ou então números abstratos, porque se as quantidades comparadas forem de espécies diferentes, não poderá haver comparação nem razão. Ninguém poderá comparar 5 metros de arame com 2 litros de água; mas 5 metros de arame podem ser comparados com qualquer quantidade de arame, e 2 litros de água, com qualquer quantidade de água.

249. As duas quantidades comparadas chamam-se termos da razão. O primeiro termo chama-se **antecedente,** o segundo termo chama-se **consequente.** A razão é o quociente do primeiro pelo segundo.

250. Indica-se a razão, escrevendo dois pontos (:) entre os seus termos, como

8:2=4 que se lê: *a razão de* 8 *para* 4 *é* 2. Nesta comparação,

8 é o antecedente ou dividendo,
4 é o consequente ou divisor,
2 é a razão ou quociente.

Problema. Qual é a razão de 24 para 8?

Solução. Dividindo 24 por 8, temos o quociente 3, que é a razão.

$$24:8=\frac{24}{8}=3$$

Problema. Qual é a razão de 4 para 12?

Solução. Dividindo 4 por 12, temos a fração $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, que é a razão (n.° 141).

$$4:12=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Regra. *Para se achar a razão entre dois números, divide-se o antecedente pelo consequente; o quociente será a razão.*

Achar as seguintes razões:

		Resp.			Resp.
1.	$88 : 11 = ?$	8	7.	$0{,}75 : 0{,}25 = ?$	3
2.	$33 : 99 = ?$	$\frac{1}{3}$	8.	$35 : 6 = ?$	$5\frac{5}{6}$
3.	$48 : 16 = ?$	3	9.	$2\frac{1}{2} : 2\frac{5}{6} = ?$	?
4.	$16 : 48 = ?$	$\frac{1}{3}$	10.	$990 : 30 = ?$	?
5.	$\frac{4}{9} : \frac{3}{12} = ?$	$1\frac{7}{9}$	11.	$\frac{15}{16} : \frac{3}{8} = ?$	?
6.	$8\frac{1}{2} : 4\frac{1}{4} = ?$	2	12.	$5\frac{1}{8} : 2\frac{3}{4} = ?$	?

251. Como o antecedente é um dividendo, o consequente é um divisor, e a operação efetuada é uma divisão, segue-se que o teorem aexpresso no número **82** tem aquí perfeita aplicação. Por isso

Se o antecendente e o consequente forem multiplicados ou divididos por um mesmo número, a razão entre êles não será alterada.

Ilustração. A razão entre 12 e 4 é 3; se multiplicarmos ambos os termos por 2, teremos $24 \div 8 = 3$; se dividirmos os mesmos termos por 2, teremos $6 \div 2 = 3$. Em ambos os casos, a razão é sempre a mesma.

$$12 : 4 = 3$$
$$(12 \times 2) : (4 \times 2) = 3$$
$$(12 \div 2) : (4 \div 2) = 3$$

Razão composta

252. A razão composta é a resultante da multiplicação termo a termo de duas ou mais razões.

Em vários processos da Aritmética, muitas vezes aparecem duas ou mais razões que devem ser reduzidas a uma só.

A razão, pois, que é formada de duas ou mais razões, tem o nome de razão composta.

Problema. Qual é a razão composta de 8:4 e de 12:3?

Solução. Escreve-se uma razão debaixo da outra: multiplicando-se depois os antecedentes, o resultado é $8 \times 12 = 96$; multiplicando-se os consequentes, é $4 \times 3 = 12$. A razão composta é $96 \div 12$, e o resultado desta razão é 8.

$$\begin{array}{r} 8 : 4 \\ 12 : 3 \\ \hline 8 \times 12 : 4 \times 3 \\ 96 : 12 = 8 \end{array}$$

Regra. *Para se achar o resultado de duas ou mais razões, multiplicam-se entre si os antecedentes, o mesmo se faz com os consequentes; os dois produtos formarão a razão composta.*

Achar a solução das seguintes razões compostas:

	Respostas		Respostas
1. 6: 2 e 10:5.	6.	5. 4:2 e 6:3.	?
2. 36:12 e 15:5.	9.	6. 9:6, 8:2 e 9:8.	?
3. 8:2, 9:3 e 12:4.	36.	7. 121:11 e 144:12.	?
4. 88:11 e 25:5.	40.	8. 33:11 e 15:5.	?

Proporções

253. Proporção é uma igualdade entre duas razões.

Assim $12:6 = 8:4$ é uma proporção que se lê: *a razão de* 12 *para* 6 *é igual à razão de* 8 *para* 4, isto é, o quociente de 12 dividido por 6 é igual ao quociente de 8 dividido por 4.

O sinal da igualdade entre duas razões é 4 pontos (::), como $12:6::8:4$ que abreviadamente se lê: 12 *está para* 6, *assim como* 8 *está para* 4.

254. Em toda proporção há duas razões expressas em quatro termos, sendo

O 1° termo o antecedente da primeira razão,
O 2° termo o consequente da primeira razão,
O 3° termo o antecedente da segunda razão,
O 4° termo o consequente da segunda razão.

1° termo		2° termo		3° termo		4° termo
12	:	**6**	::	**8**	:	**4**

O primeiro termo e o último chamam-se **extremos,** e os dois termos do meio chamam-se **meios.** Na proporção acima, 12 e 4 são extremos, e 6 e 8 são meios.

Propriedades da proporção

255. Uma proporção tem diversas propriedades. Damos aqui sómente as quatro seguintes que são as mais importantes, e que precisamos conhecer.

1ª *Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.*

Ilustração. Multiplicando os dois meios da proporção que está ao lado, temos $6 \times 8 = 48$; multiplicando os dois extremos, temos $12 \times 4 = 48$; os dois produtos são, portanto, iguais.

$$12 : 6 :: 8 : 4$$
$$6 \times 8 = 12 \times 4$$

Para verificarmos se uma proporção está certa, multiplicaremos os dois meios, e se o produto fôr igual ao dos extremos, a proporção estará exata.

2ª *Se o produto dos extremos fôr dividido por um meio, o quociente será o outro meio; e se o produto dos meios fôr dividido por um extremo, o quociente será o outro extremo.*

Ilustração. Na proporção que está ao lado, multiplicando os extremos 12 e 4, dividindo o produto pelo meio 8, temos o outro meio, que é 6. Multiplicando os meios 6 e 8, e dividindo o produto pelo extremo 4, obtemos o outro extremo, que é 12. Esta propriedade é muito importante, porque nos habilita a achar facilmente qualquer termo de uma proporção, como veremos mais adiante.

$$12 : 6 :: 8 : 4$$
$$\frac{12 \times 4}{8} = 6$$
$$\frac{6 \times 8}{4} = 12$$

Ilustração. Dois números estão na razão direta, quando aumentando um, aumenta também o outro, ou quando diminuindo um, diminue também o outro; e estão na razão inversa, quando aumentando um, diminue o outro, ou diminuindo um, aumenta o outro.

Problema de regra de três direta. Se 4 quilos de café custam Cr$ 8,00, quanto devem custar 6 quilos?

Solução. Para formarmos a proporção, temos três quantidades conhecidas e uma desconhecida representada por x, e cujo valor queremos achar; 4 quilos e 6 quilos que são quantidades conhecidas e principais, e formam a primeira razão; Cr$ 8,00 e x são quantidades relativas das primeiras e formam a segunda razão. Este problema é da **regra de três direta**, porque aumentando o número de quilos, aumentará necessariamente o importe dêles; e diminuindo o número de quilos, diminuirá também o seu importe.

Processo

4 quilos { Cr$ 8,00
6 quilos } x

(1º) (2º) (3º) (4º)

$$4 : 6 :: 8,00 : x$$

$$x = \frac{6 \times 8,00}{4} = 12,00$$

Para dispor os quatro termos numa proporção, escreveremos x como o quarto termo da proporção, e a quantidade da mesma espécie que x, como terceiro termo. Ora, neste problema x representa dinheiro, e a quantidade da mesma espécie é Cr$ 8,00. Depois de escrevermos estes dois termos da proporção passaremos a escrever os outros dois termos da outra razão.

Se x fôr maior que Cr$ 8,00, escreveremos a maior quantidade como o segundo termo; se fôr menor, escreveremos a menor quantidade somo segundo termo.

Pela natureza do problema, vê-se que x é mais do que Cr$ 8,00, porque se 4 quilos custam Cr$ 8,00, 6 quilos devem custar mais de Cr$ 8,00. Então escreveremos 6 como o segundo termo, e 4 como o primeiro. Multiplicaremos agora os meios e dividiremos o produto pelo extremo conhecido, e teremos Cr$ 12,00, que é o importe dos 6 quilos.

Problema de regra de três inversa. Se 15 homens fazem um muro em 40 dias, 30 homens em quantos dias o farão?

Solução. 15 homens e 30 homens formam a primeira razão; 40 dias e x são quantidades relativas e formam a segunda razão. Este problema é de **regra de três inversa**, porque aumentando o número de trabalhadores, diminuem os dias de serviço; pois, se 15 homens gastam 40 dias em um trabalho, 30 homens, que é o dôbro do pessoal, gastarão a metade do tempo. Os termos dispõem-se do mesmo modo que na regra de três diréta. Escreveremos x como o quarto termo, e a quantidade da mesma espécie que x, que é 40 dias, como o terceiro termo. Pela natureza do problema vê-se que x é menos que 40 dias, porque se 15 homens gastam 40 dias em um serviço, 30 homens devem gastar menos dias. Escreveremos então 15 como o segundo termo, e 30 como primeiro.

Processo

15 homens } { 40 dias
30 homens } { x dias

$$30 : 15 :: 40 : x$$

$$x = \frac{15 \times 40}{30} = 20$$

O valor de x é 20 dias, tempo que gastam os 40 homens.

Regra geral para a resolução da regra de três simples direta e inversa

Escreve-se x como o quarto termo da proporção, e como terceiro termo escreve-se a quantidade da mesma espécie que x.

Se da natureza do problema, x fôr maior do que o terceiro termo, escreve-se o maior dos dois números como segundo termo, e o menor como primeiro termo. Mas, se x fôr menor do que o terceiro termo, escreve-se o número menor, como segundo termo, e o maior, como primeiro termo.

Multiplicam-se os dois meios, divide-se o produto pelo extremo conhecido, e o quociente será o valor de x.

Obsevação. Quer os dois problemas que acabamos de resolver para fundamentar esta regra, quer os dez que seguem para exercício de aplicação, poderiam ser resolvidos mais fàcilmente pelo sistema da *redução à unidade*, exposto no número 85; mas a redução à unidade, se resolve mais facilmente estes problemas tão simples, não satisfaz do mesmo modo todos os casos variados do domínio das *proporções* e da *regra de três;* pois há problemas que, por meio das proporções se resolvem fàcilmente, e que, por meio da redução à unidade, só por um esfôrço extremo da imaginação é que podem ser resolvidos.

Os problemas que agora damos para exercício prático, são como um ensaio para facilitar o uso das proporções e da regra de três que nos auxiliarão mais tarde a resolver fàcilmente grande número de questões da Aritmética.

1. Se 7 kg. de cânfora custam Cr$ 28,00, quanto devem custar 15kg. ? Resp. Cr$ 60,00

Solução. x é o quarto termo da proporção; a quantidade da mesma espécie que x é Cr$ 28,00, esta será o terceiro termo. Pela natureza do problema vemos que x há de ser maior do que Cr$ 28,00, porque 15 kg. custarão mais do que 7 kg., e por isso 15 kg., que é maior, será o segundo termo, e 7 kg. será o primeiro.

2. Se 5 kg. de goma arábica custam Cr$ 16,00, quanto devem custar 12 kg. ? Resp. Cr$ 38,40.

3. Se 33 homens fazem 165 metros de muro, que extensão podem fazer 198 homens no mesmo tempo. Resp. 990m.

4. Sabe-se que 15 homens fariam certa obra em 18 dias; em quantos dias 10 homens poderiam fazer a mesma obra ? Resp. 27.

5. Um engenheiro calculou que seriam precisos 75 homens para fazer um atêrro em 220 dias; mas sendo necessário que o atêrro ficasse pronto em 15 dias, quantos trabalhadores tinha de empregar para concluí-lo neste tempo ? Resp. 1100

6. Se $\frac{2}{3}$ de uma obra foram avaliados em Cr$ 1100,00 qual é o valor de $\frac{3}{11}$ da mesma obra ? Resp. Cr$ 450,00.

7. Vendendo-se $\frac{3}{7}$ de uma pipa de vinho por Cr$ 165,00, por quanto se deve vender o resto da pipa ? Resp. Cr$ 220,00.

8. Se 5 homens plantam uma roça de milho em 12 horas, em quanto tempo a plantariam êles, se tivessem mais 4 trabalhadores ? Resp. 6h. e 40m.

9. Quantos homens são precisos para fazer um serviço em 18 dias, sabendo-se que 36 homens o podem fazer em 24 dias.
Resp. 48 homens.

10. Se $\frac{2}{5}$ de uma barrica de farinha custaram Cr$ 16,00, quanto deve custar a barrica inteira
Resp. Cr$ 40,00

11. Uma lebre leva 100 metros de dianteira a um cão que a persegue; mas enquanto a lebre anda 18 metros, o cão anda 20; que distância tem de andar o cão para alcançá-la ?
Resp. 1000m.

Solução. Em cada 20 metros, o cão vence 2 metros na distância que o separa da lebre; ora, se para vencer 2 metros o cão tem de andar 20 metros, para vencer 100 metros, quanto tem de andar?

12. Um criminoso foge perseguido por uma escolta que o segue a 2 quilômetros de distância; mas, como êle corre a pé e a escolta corre a cavalo, o criminoso só anda 60 metros, enquanto a escolta anda 140. Que distância tem de andar a escolta para alcançar o criminoso?
Resp. 3, 500km.

Medir qualquer altura pela sombra

260. Podemos achar facilmente a altura de uma árvore, de uma torre ou qualquer outro edifício, quando êles projetam a sua sombra em um terreno ou solo perfeitamente horizontal. Se quisermos, por exemplo, medir a altura de uma tôrre, quando a sua sombra é distinta, colocaremos uma vara qualquer perpendicular ao solo, e então a sombra da vara estará para a sombra da torre, assim como a altura da vara estará para a altura da tôrre.

Problema. A sombra de uma tôrre mede 22 metros no mesmo momento em que a sombra de uma vara de 3 metros mede 1 metro. Qual é a altura da tôrre?

Solução. A sombra da vara, que é 1 metro, está para a sombra da tôrre, que é 22 metros, assim como a altura da vara, que é 3 metros, está para a altura da tôrre, que é x.

Sombra da vara 1m, Sombra da tôrre 22m — $1 : 22 :: 3 : x$

Altura da vara 3m, Altura da tôrre x — $x = \frac{22 \times 3}{1} = 66$

Multiplicando os dois meios e dividindo o produto pelo extremo conhecido, temos 66 metros, que é a altura da tôrre.

1. A sombra de um mastro mede 20,20m, quando a sombra de um metro mede 50 centímetros; qual é a altura do mastro?
Resp. 40,40m.

2. Qual é a altura de um coqueiro, que projeta uma sombra de 4,60m, ao mesmo tempo que uma bengala de 0,80m, projeta uma sombra de 0,20m. Resp. 18,40m.

3. A sombra de uma arvore mede 56 metros, na mesma ocasião em que a sombra de um metro mede 80 centímetros; qual é a altura da árvore? Resp. 70m.

Comparação dos termômetros

261. Termômetro é um instrumento de física que serve para avaliar as variações da temperatura ou o grau do calor. A palavra termômetro vem de dois vocábulos gregos que etimologicamente significam medida do calor.

Ilustração. A experiência diariamente nos demonstra que os diversos corpos da natureza se dilatam com o calor, e contraem com o frio; e como o mercúrio é de todos os corpos o que mais regularmente se dilata com as variações da temperatura, prefere-se quasi sempre êste líquido para a fabricação dos termômetros. A figura que se vê abaixo representa um termômetro, contendo uma peça de madeira sôbre a qual está fixo um tubo de vidro que termina em uma esfera que está cheia de mercúrio. Se aumenta o calor, o mercúrio dilata-se, isto é, toma maior volume e sobe pelo tubo; se diminue o calor, o mercúrio contrai-se e desce. Uma escala graduada que está ao lado do tubo, mostra os graus de calor indicados pela dilatação do mercúrio.

Ha vários termômetros, mas os mais usados são o Centígrado e o de Fahrenheit.

O **Termômetro centígrado**, que é o mais usado entre nós marca o ponto zero 0° na temperatura de gêlo fundente, e 100 graus no calor de água fervendo; o intervalo dêstes dois pontos fixos é dividido em cem partes iguais chamadas graus. Desta divisão veio-lhe o nome de **centígrado**.

O **Termômetro Fahrenheit**, usado nos Estados Unidos, na Inglaterra e em outros países frios, marca o ponto zero 0° em uma temperatura muito mais baixa do que o gêlo fundente, a qual se obtém misturando partes iguais de gêlo pilado e de sal amoníaco. Nesta temperatura frígida, o termômetro Fahrenheit marca o ponto 0°, e na temperatura da água fervendo marca 212 graus; de sorte que o ponto dêste termômetro correspondente ao zero do centígrado é o grau 32°; e o espaço entre este ponto e a água fervendo tem 180 graus. Este termômetro recebeu o nome de seu autor, Fahrenheit, sábio alemão, que morreu em 1740. O nome Fahrenheit, pronuncia-se *Fá-re-nait.*

Como vimos nesta ilustração, a tabela da graduação é muito diferente nos dois termômetros, e por isso, sendo dados os graus da temperatura em um termômetro, precisamos saber calcular a que graus correspondem no outro.

Problema. O termômetro centigrado marcando 35 graus, quantos graus deverá marcar o termômetro Fahrenheit?

Solução. O intervalo que no Centígrado está dividido em 100 graus, no Fahrenheit está dividido em 180; a proporção será, portanto, 100 : 180 :: 35 : x, isto é, 100 centígrados estão para 180 Fahrenheit, assim como 35 estão para x. O valor de x é 63 graus, juntando a êste número mais 32 graus que o Fahrenheit tem abaixo do zero centígrado, temos 63 + 32 = 95 graus. Vemos pois que 35 graus centígrados correspondem a 95 Fahrenheit.

$$100 : 180 :: 35 : x$$

$$x = \frac{180 \times 35}{100} = 63$$

$$63 + 32 = 95 \text{ graus}$$

Para reduzir graus centígrados a graus Fahrenheit, temos a seguinte

Regra: *Estabelece-se a proporção*: 100 *está para* 180, *assim como os graus centígrados estão para os de Fahrenheit, e ao resultado acrescentam-se mais* 32.

Problema. Sendo 95 graus no termômetro Fahrenheit, quantos graus deve marcar o termômetro centígrado?

Solução. Subtraindo de 95 os 32 graus que o Fahrenheit tem abaixo de zero centígrado, restam 63 graus. Agora a proporção será 180 : 100 : : 63 : x. O valor de x é 35, por isso o termômetro centígrado deve marcar 35 graus.

$$95 - 32 = 63$$

$$180 : 100 :: 63 : x$$

$$x = \frac{100 \times 63}{180} = 35$$

Para reduzir os graus Fahrenheit a graus centígrados, temos a seguinte

Regra: *Dos graus de Fahrenheit subtraem-se* 32, *e depois estabelece-se a proporção*: 180 *está para* 100, *assim como os graus de Fahrenheit estão para os graus centígrados.*

Nota. Vamos dar duas regras muito simples que podem ser facilmente conservadas na memória para operar estes cálculos:

1ª Para reduzir graus centígrados aos de Fahrenheit:

Multiplicam-se os graus por 9, e ao produto dividido por 5 juntam-se 32.

2ª Para reduzir graus Fahrenheit a centígrados:

Subtraem-se 32, e o resto, multiplicado por 5, divide-se por 9.

Damos em seguida uma tabela em que os graus dos dois termômetros se correspondem sem frações, para os discípulos se exercitarem nestes cálculos. Tomando os centígrados, devem calcular os de Fahreneit, e vice-versa.

Cent.	Fah.	Cent.	Fah.	Cent.	Fah.	Cent.	Fah.	Cent.	Fah.
0	32	25	77	50	122	75	167	100	212
5	41	30	86	55	131	80	176	Com frações	
10	50	35	95	60	140	85	185	26	$78\frac{4}{5}$
15	59	40	104	65	149	90	194	27	$80\frac{3}{5}$
20	68	45	113	70	158	95	203	28	$82\frac{2}{5}$

Regra de três composta

262. A regra de três composta consta sempre de três ou mais razões e oferece mais de três quantidades para se achar a incógnita.

Problema. Se 4 homens serram 20 tábuas em 5 dias, quantas tábuas serrarão 12 homens em 3 dias?

Solução. Neste problema temos três razões que são 4 homens e 12 homens, 5 dias e 3 dias, 20 tábuas e x tábuas; x é o quarto termo da proporção; a quantidade da mesma espécie que x, que é 20 tábuas, é o terceiro termo.

$$\begin{matrix} 4 \text{ homens} \\ 12 \text{ homens} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 5 \text{ dias} \\ 3 \text{ dias} \end{matrix} \right\{ \begin{matrix} 20 \text{ tábuas} \\ x \text{ tábuas} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} : 12 \\ \cdot\ 3 \end{matrix} \right\{ :: 20 : x$$

$$20 : 36 :: 20 : x$$

$$x = 36$$

Para sabermos colocar os termos das outras razões, devemos fazer o mesmo raciocínio que já fizemos na regra de três simples.

Se 4 homens serram 20 tábuas, 12 serram mais, logo: a resposta deve ser mais e por isso, o número maior da razão, que é 12, pertencerá ao segundo termo da proporção, e 4 pertencerá ao primeiro.

Se em 5 dias serram 20 tábuas, em 3 dias serram menos tábuas, logo 3, que é menor, pertencerá ao segundo termo, e 5 pertencerá ao primeiro.

Como a primeira razão é composta de duas razões, reduz-se a uma razão simples e temos $4 \times 5 = 20$, e $12 \times 3 = 36$ (n.º 252). A proporção é, portanto $20 : 36 :: 20 : x$; sendo $x = 36$.

Regra geral para a formação da regra de três composta

Escreve-se x como o quarto termo da proporção, e a quantidade da mesma espécie que x como terceiro termo.

Escrevem-se todas as mais razões em forma de uma razão composta, observando em cada razão que, se a resposta fôr maior do que o terceiro termo, o número maior da razão pertencerá ao segundo termo da proporção, e o menor ao primeiro, e ao contrário se a resposta fôr menor.

Reduz-se a razão composta a uma razão simples, e acha-se na proporção o valor de x.

263. Podemos deixar de formular a proporção, escrevendo logo os números das diversas razões em forma de fração, observando em cada razão que, se a resposta fôr mais, o maior número da razão irá para o numerador e o menor para o denominador, e se a resposta fôr menos, o menor número irá para o numerador, e o maior para o denominador. Cancelam-se depois os fatores comuns ao numerador e ao denominador, e acha-se depois o resultado da fração.

Problema. Se um homem pode viajar 360 quilômetros em 12 dias, andando 8 horas por dia, quantas horas deverá êle andar cada dia, para vencer 450 quilômetros em 20 dias?

$$\begin{matrix} 360 \text{ km.} \\ 450 \text{ km.} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 12 \text{ dias} \\ 20 \text{ dias} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 8 \text{ horas} \\ x \text{ horas} \end{matrix}$$

$$x = \frac{8 \times 450 \times 12}{360 \times 20} = 6 \text{ horas}$$

Solução. x será igual à fração que se vai formar, e a quantidade da mesma espécie que x vai sempre no numerador da fração. Todas as mais quantidades teem de ser distribuidas pelo numerador e pelo denominadr.

Como 450 km. levam mais horas do que 360, a resposta será mais, e por isso 450 irá para o numerador, e 360 para o denominador. Como 20 dias precisam de menos horas cada dia, do que 12 dias, a resposta será menos; então 12 irá para o numerador, e 20 para o denominador. Cancelando agora os diversos fatores comuns ao numerador e ao denominador, acharemos que a resposta do problema é 6 horas.

1. Se 2 carros de feno sustentam 3 cavalos durante 4 semanas, 5 carros de feno por quantas semanas sustentarão 6 cavalos?

Solução. $x = \frac{4 \times 3 \times 5}{6 \times 2} = 5$ semanas.

2. Um colégio tem 100 alunos internos, e faz Cr$ 500,00 de despesa cada 15 dias; se êste colégio recebesse mais 20 alunos, que despesa faria em 45 dias? Resp. **Cr$ 1800,00**

3. Se 75 homens podem fazer um muro de 50 metros de comprimento, 8 de altura e 3 de grossura, em 10 dias, em quanto tempo 100 homens, podem fazer um muro de 150 metros de comprimento, 10 de altura e 4 de grossura? Resp. $37\frac{1}{2}$ dias.

4. Se 30 quilogramas de algodão fazem 3 peças de musselina de 42 metros de comprimento cada uma, e de 0,625m de largura, quantos quilogramas de algodão são necessários para fazer 50 peças de musselina de 35 metros de comprimento, e de 1,125m de largura? Resp. 750 kg.

FALSA POSIÇÃO

264. A regra de falsa posição é um processo aritmético em que, por meio de um número suposto ou falso, se acha o número requerido.

A falsa posição é uma aplicação curiosa da regra de três.

Problema. Perguntando-se a uma professora qual era o número de suas alunas, ela respondeu: "Se eu tivesse outras tantas como as que tenho, e mais metade e a quarta parte, teria 88". Qual era o número de alunas?

Problema. Dividir Cr$ 140,00 em três partes proporcionais a 3, 5 e 6.

Solução. A soma dos números proporcionais às partes é $3 + 5 + 6 = 14$. Temos pois de formar a seguinte proporção: A soma dos números proporcionais está para o dividendo, que é Cr$ 140,00, assim como cada um dos números proporcionais está para o seu relativo. Chamemos estes relativos x, y, e z respectivamente. Como há três números proporcionais, estabeleceremos três proporções para achar as três partes relativas ou correspondentes. As três partes proporcionais a 3, 5 e 6 são Cr$ 30,00, Cr$ 50,00 e Cr$ 60,00.

Processo

$14 : 140,00 :: 3 : x = 30,00$
$14 : 140,00 :: 5 : z = 50,00$
$14 : 140,00 :: 6 : y = 60,00$

Portanto

Uma parte é	Cr$ 30,00
Outra parte é	Cr$ 50,00
Outra parte é	Cr$ 60,00
Soma das partes	Cr$ 140,00

Regra. *Para se efetuar uma divisão proporcional, forma-se uma proporção, na qual a incógnita é o quarto termo, um dos números proporcionais é o terceiro termo, o dividendo é o segundo termo, e a soma dos números proporcionais é o primeiro.*

Forma-se uma proporção semelhante para cada um dos outros números proporcionais, e depois resolvem-se as diversas proporções.

267. O modo de efetuar uma divisão proporcional por meio de frações é o seguinte:

Problema. Dividir Cr$ 140,00 em três partes proporcionais a 3, 5 e 6.

Solução. A soma dos números proporcionais é $3 + 5 + 6 = 14$. Então uma das partes é $\frac{3}{14}$ de Cr$ 140,00, a outra é $\frac{5}{14}$ e a outro é $\frac{6}{14}$. Ora $\frac{3}{14}$ de Cr$ 140,00 são Cr$ 30,00, $\frac{5}{14}$ de Cr$ 140,00 são Cr 50,00 e $\frac{6}{14}$ de 140,00 são Cr$ 60,00. (Vêde n.º 160). Este processo é mais simples, porque evita a proporção.

Processo

$\frac{3}{14}$ de $140 = 30$
$\frac{5}{14}$ de $140 = 50$
$\frac{6}{14}$ de $140 = 60$

Regra. *Para se efetuar uma divisão proporcional, formam-se tantas frações quantas forem as partes proporcionais, tendo cada fração a soma dos números proporcionais como denominador, e um dêsses números como numerador.*

Acha-se depois no dividendo a parte correspondente a cada fração.

1. Dividir o número 78 em partes porporcionais a 3, 4 e 6.

Resp. 18, 24 e 36.

2. Um homem tinha 200 carneiros e queria dividi-los em 3 rebanhos na proporção de 2, 3 e 5; quantos carneiros devia ter cada rebanho?

Resp. 40, 60 e 100.

3. Dividir o número 120 em partes proporcionais $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$.

Solução. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ reduzidos ao mesmo denominador, dão $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{12}$ e $\frac{3}{12}$. Neste caso, 120 será dividido na proporção de 6, 4 e 3, que são os numeradores das frações.

4. Um sino que pesa 792 quilos tem na sua composição cobre, níquel e prata na proporção de 5, 2 e $\frac{1}{2}$: quantos quilos tem de cada metal ? Resp. Cobre 550, niquel 220, prata 22.

5. A pólvora é composta de 76 partes de salitre, 14 partes de carvão de madeira e 10 partes de enxofre. Qual é a proporção destas matérias em 112 quilogramas de pólvora ?

Resp. Salitre 85 $\frac{3}{25}$, carvão 15 $\frac{17}{25}$ e enxofre 11 $\frac{5}{25}$.

6. Três pessoas alugaram um grande pasto por Cr$ 320,00, aluguel que deveria ser dividido proporcionalmente ao número de animais que lá colocassem. Um dos alugadores pôs 80 carneiros, outro 120 e o terceiro, 40. Qual foi a parte de cada um no aluguel ?

PORCENTAGEM

268. Porcentagem é um processo aritmético no qual se toma o número 100 como base, para de cada 100 se tirar ou juntar alguma quantidade. Assim, 5 por cento quer dizer 5 em cada 100; 12 por cento quer dizer 12 em cada 100. Em dinheiro, 5 por cento quer dizer Cr$ 5,00 em cada Cr$ 100,00.

A porcentagem tem muita aplicação nos problemas de juros, descontos comissões e em muitos outros cálculos comerciais.

Nota. A palavra porcentagem deriva-se do latim *percentum*, e por isso os antigos diziam *percentagem*; mas êste têrmo caiu em desuso e foi substituído pela palavra porcentagem derivada de *por cento*. Em todo o Brasil, quer na linguagem popular, quer no comércio, quer nos despachos oficiais, o termo empregado é sempre **porcentagem**. O uso geral, portanto, legalizou a substituição.

269. Em todos os cálculos em que o número 100 é tomado como unidade, precisamos operar com três quantidades denominadas principal, taxa e porcentagem.

Principal é o número sôbre o qual se tem de calcular a porcentagem; tem também o nome de **base,** porque é o valor fundamental da operação.

Taxa é o número que mostra quantas unidades se teem de tomar em cada 100.

Porcentagem é a soma de todos os números que se tomaram em cada 100.

Ilustração. Calculando quanto é 5 por cento de 200 laranjas, acharemos que são 10, porque se 100 dão 5, 200 darão 10. Neste exemplo,

200 laranjas é o principal,
5 por cento é a taxa,
e 10 laranjas é a porcentagem.

Se tivermos dois dêstes termos, poderemos fàcilmente achar o outro; assim:

tendo o principal e a taxa, podemos achar a porcentagem,
tendo o principal e a porcentagem, podemos achar a taxa,
tendo a porcentagem e a taxa, podemos achar o principal.

270. Por abreviatura, usa-se do sinal % que se lê: **por cento,** assim

1 % lê-se:	*um por cento,*	50 % lê-se:	*cincoenta por cento,*
2 % "	*dois por cento,*	100 % "	*cento por cento,*
5 % "	*cinco por cento,*	200 % "	*duzentos por cento.*

Achar a porcentagem

271. Os problemas que vamos resolver, oferecem o principal e a taxa, e requerem a porcentagem.

Problema. Quanto é 5 % de 120 ?

Solução. 120 é o principal, e 5 % é a taxa. Multiplicando o principal pela taxa temos 600. Dividindo agora este produto por 100, temos 6, que é 5 % de 120. Para dividirmos um número por 100, bastará cortar-lhe dois algarismos com a vírgula. (Vêde n.º 78).

$$\begin{array}{r} 120 \\ 5\ \% \\ \hline 6{,}00 \end{array}$$

Regra. *Para se achar a porcentagem, multiplica-se o principal pela taxa e divide-se o produto por* 100.

Demonstração. A regra acima é baseada na seguinte proporção, por meio da qual se podem resolver todos os problemas de porcentagem:

100 : Principal :: Taxa : Porcentagem ou
100 : 180 :: 5 : x

Se o principal 100 produz 5, o principal 180 quanto produzirá?

A proporção do problema acima será a seguinte: o principal 100 está para o principal 180, assim como 5, relativo de 100, está para x, relativo de 180. Para achar o valor de x temos de multiplicar 180 por 5, e dividir o produto por 100. Ora, 180 é o principal, e 5 é a taxa; logo *multiplicando o principal pela taxa, e dividindo o produto por* 100, *acharemos a porcentagem.*

Achar as seguintes porcentagens:

	Respostas		Respostas
1. 6 % de 250.	15	9. 5 % de 245.	?
2. 8 % de Cr$ 175,00.	Cr$ 14,00	10. 15 % de 1200.	?
3. 8 % de 11.	0,88	11. 20 % de Cr$ 500,00.	?
4. 25 % de 25.	6,25	12. 30 % de Cr$ 85,00.	?
5. 15 % de Cr$ 360,00.	Cr$ 54,00	13. 12 % de Cr$ 750,00.	?
6. 4 % de 225.	9	14. 1 % de Cr$ 990,00.	?
7. 100 % de 240 litros.	240 litros	15. 3 % de Cr$ 700,00.	?
8. 80 % de 250	200	16. 60 % de Cr$ 950,00.	?

272. Quando a taxa é uma fração, como $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, etc, ou um número misto, como $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{4}$, $6\frac{3}{4}$, etc., reduz-se a fração ordinária a uma decimal, (n.° **175**), e opera-se depois como em uma multiplicação decimal, notando, porém, que antes de dividir o produto por 100, é necessário cortar ou separar tantos algarismos quantos algarismos decimais tiver a taxa (n. **178**).

Problema. Quanto é $4\frac{1}{4}$ % de 184?

Solução. A fração $\frac{1}{4}$, reduzida a uma decimal, dá 0,25: a taxa é, portanto, 4,25. Operando a multiplicação, temos o produto 78.200. Como há dois decimais no multiplicador, temos de cortar dois algarismos no produto, e depois dividí-lo por 100, e o resultado é 7,82 (7 inteiros e 82 centesimos).

```
    184
   4,25 %
   ----
    920
   368
  736
  -----
  7,8200
```

Achar as seguintes porcentagens:

	Respostas:
1. $\frac{1}{2}$ % de 1800.	9
2. $\frac{1}{2}$ % de 500.	2,5
3. $\frac{3}{4}$ % de 800.	6
4. $\frac{1}{4}$ % de 1000.	2,5
5. $5\frac{1}{2}$ % de 80.	4,4

	Respostas:
6. $4\frac{1}{8}$ % de Cr$ 880,00	[illegible]
7. $\frac{7}{16}$ % de Cr$ 500,00	[illegible]
8. $\frac{3}{8}$ % de Cr$ 400,00	[illegible]
9. $4\frac{3}{4}$ % de Cr$ 800,00	[illegible]
10. $10\frac{1}{2}$ % de Cr$ 1000,00	[illegible]

Achar a taxa

273. Os problemas seguintes dão a porcentagem e o principal, e requerem a taxa.

Problema. O número 6 quantos por cento é de 50?

Solução. 6 é a porcentagem, e 50 é o principal. Multiplicando a porcentagem por 100, e dividindo o produto pelo principal, temos a taxa, que é 12 %. O cancelamento facilita muito esta operação. (Vêde n.° 158).

Processo

$$\frac{6 \times 100}{50} = 12\ \%$$

Regra. *Para se achar a taxa, multiplica-se a porcentagem por* 100, *e divide-se o produto, pelo principal.*

Demonstração. A proporção que serve de base para esta regra, é a seguinte: O principal 50 está para 100, assim como 6, relativo de 50, está para x, relativo de 100. Portanto $50 : 100 :: 6 : x$.

Para achar o valor de x, temos de multiplicar 6 por 100, e dividir o produto por 50. Ora, 6 é a porcentagem, e 50 é o principal, logo multiplicando *a taxa por* 100, e dividindo o produto *pelo principal*, obteremos a taxa.

Achar as seguintes taxas:

1. 44 quantos por cento são de 88? Resp. ?
2. 2 quantos por cento são de 15 ? " ?
3. Cr$ 2,00 quantos por cento são de Cr$ 5,00 ? " ?
4. Cr$ 15,20 quantos por cento são de Cr$ 950,00 ? " ?
5. 99 quantos por cento são de 100 ? " ?
6. $\frac{1}{2}$ quantos por cento é de $\frac{5}{8}$? " ?

Solução. Multiplicando a porcentagem, que é $\frac{1}{2}$ por 100, temos $\frac{100}{2}$; dividindo agora a produto pelo principal, que é $\frac{5}{8}$, temos $\frac{800}{10} = 80$ %. (Vêde n.° 159 3.° caso).

7. Um homem devia Cr$ 500,00 e pagou Cr$ 75,00; quantos por cento da divida pagou ? Resp. 15 %.

8. Quantos por cento de 100 jardas são 99 jardas ? Resp. 99 %.

9. Quantos por cento de Cr$ 20,00 são Cr$ 25,00 ? Resp. 125 %.

10. Um homem tinha Cr$ 300,00 e gastou Cr$ 25,00; quantos por cento gastou do dinheiro ? Resp. 8 $\frac{1}{3}$ %.

Achar o principal

274. Os problemas seguintes dão a taxa e a porcentagem, e requerem o principal.

Problema. De que número 20 é 5 %.

Solução. 20 é a porcentagem, 5 é a taxa; multiplicando a porcentagem por 100, e dividindo o produto pela taxa, temos o quociente 400, que é o principal.

Processo

$$\frac{20 \times 100}{5} = 400$$

Regra. *Para se achar o principal, multiplica-se a porcentagem por 100, e divide-se o produto pela taxa.*

Demonstração. A proporção que serve de base para esta regra, é a seguinte: A taxa 5 está para a porcentagem 20, assim como 100, relativo de 5, está para x, relativo, de 20. Portanto 5:20 :: 100 : x.

Para achar o valor de x temos de multiplicar 20 por 100, e dividir o produto pelo extremo 5. Ora, 20 é a porcentagem, e 5 é a taxa; logo *multiplicando a porcentagem por 100, e dividindo o produto pela taxa, acharemos o principal.*

1. De que número 28 é 7 % ? Resp. 400
2. De que número 45 é 25 % ? " 180
3. De que quantia Cr$ 67,50 é 15 % ? " Cr$ 450,00
4. De que número 4 é $\frac{1}{2}$ % ? " 800
5. De que quantia Cr$ 100,00 é $\frac{2}{5}$ % ? " Cr$ 25.000,00
6. Um pai deu a um filho Cr$ 30,00, cuja quantia era só 6 % daquela que êle deu a sua filha; quanto recebeu esta? Resp. Cr$ 500,00

7. De que número, 3 é 4 % ? Resp. 75

8. Um trabalhador economiza cada ano Cr$ 280,00, que são 35 % do seu salário; quanto ganha êle por ano?

Resp. Cr$ 800,00

9. Um proprietário comprou uma casa que aluga anualmente por Cr$ 1152,00. Este aluguel, sendo 9 % do custo da casa, pergunta-se por quanto a comprou êle ?

Resp. Cr$ 12800,00

10. Pus no banco certa quantia que a 5 % me rende anualmente Cr$ 325,00; qual é a quantia ? Resp. Cr$ 6500,00

As três fórmulas da porcentagem

275. Damos ao lado as fórmulas das três regras principais que apresentamos sôbre a porcentagem. Substituindo os nomes pelos respetivos valores, e efetuando a operação, obteremos o resultado de qualquer problema desta natureza.

$$\text{Porcentagem} = \frac{\text{Principal} \times \text{taxa}}{100}$$

$$\text{Taxa} = \frac{\text{Porcentagem} \times 100}{\text{principal}}$$

$$\text{Principal} = \frac{\text{Porcentagem} \times 100}{\text{taxa}}$$

Achar o principal quando êle está somado à porcentagem

276. Podemos achar também o principal, quando êle está somado à porcentagem em uma só quantidade; neste caso temos de operar do seguinte modo:

Problema. Vendi um cavalo por Cr$ 276,00 e ganhei na venda 15 %; quanto me custou o cavalo ?

Solução. O custo do cavalo somado ao lucro ou porcentagem é Cr$ 276,00; multiplicando esta quantia por 100, e dividindo o produto 100 + 15, que são 115, teremos o quociente Cr$ 240,00, que é o custo do cavalo.

Processo

$$\frac{276{,}00 \times 100}{100 + 15} = 240{,}00$$

Regra. *Para se achar o principal, quando êle está somado à porcentagem, multiplica-se a soma dada por 100, e divide-se o produto por 100 mais a taxa.*

Demonstração da regra. A proporção dêste problema é a seguinte: 100 + 15, que é o principal e a porcentagem, está para Cr$ 276,00, que é a sôma do principal e porcentagem, assim como 100, que é só o principal, está para x, que é também só o principal; $100 + 15 : 276{,}00 :: 100 : x$.

Achar as seguintes taxas:

1. 44 quantos por cento são de 88? Resp. ?
2. 2 quantos por cento são de 15 ? " ?
3. Cr$ 2,00 quantos por cento são de Cr$ 5,00 ? " ?
4. Cr$ 15,20 quantos por cento são de Cr$ 950,00 ? " ?
5. 99 quantos por cento são de 100 ? " ?
6. $\frac{1}{2}$ quantos por cento é de $\frac{5}{8}$? " ?

Solução. Multiplicando a porcentagem, que é $\frac{1}{2}$ por 100, temos $\frac{100}{2}$; dividindo agora a produto pelo principal, que é $\frac{5}{8}$, temos $\frac{800}{10} = 80$ %. (Vêde n.º 159 3.º caso).

7. Um homem devia Cr$ 500,00 e pagou Cr$ 75,00; quantos por cento da divida pagou ? Resp. 15 %.

8. Quantos por cento de 100 jardas são 99 jardas ? Resp. 99 %.

9. Quantos por cento de Cr$ 20,00 são Cr$ 25,00 ? Resp. 125 %.

10. Um homem tinha Cr$ 300,00 e gastou Cr$ 25,00; quantos por cento gastou do dinheiro ? Resp. 8 $\frac{1}{3}$ %.

Achar o principal

274. Os problemas seguintes dão a taxa e a porcentagem, e requerem o principal.

Problema. De que número 20 é 5 %.

Solução. 20 é a porcentagem, 5 é a taxa; multiplicando a porcentagem por 100, e dividindo o produto pela taxa, temos o quociente 400, que é o principal.

Processo

$$\frac{20 \times 100}{5} = 400$$

Regra. *Para se achar o principal, multiplica-se a porcentagem por 100, e divide-se o produto pela taxa.*

Demonstração. A proporção que serve de base para esta regra, é a seguinte: A taxa 5 está para a porcentagem 20, assim como 100, relativo de 5, está para x, relativo, de 20. Portanto $5:20 :: 100 : x$.

Para achar o valor de x temos de multiplicar 20 por 100, e dividir o produto pelo extremo 5. Ora, 20 é a porcentagem, e 5 é a taxa; logo *multiplicando a porcentagem por 100, e dividindo o produto pela taxa, acharemos o principal.*

1. De que número 28 é 7 % ? Resp. 400
2. De que número 45 é 25 % ? " 180
3. De que quantia Cr$ 67,50 é 15 % ? " Cr$ 450,00
4. De que número 4 é $\frac{1}{2}$ % ? " 800
5. De que quantia Cr$ 100,00 é $\frac{2}{5}$ % ? " Cr$ 25.000,00
6. Um pai deu a um filho Cr$ 30,00, cuja quantia era só 6 % daquela que êle deu a sua filha; quanto recebeu esta? Resp. Cr$ 500,00

7. De que número, 3 é 4 % ? Resp. 75

8. Um trabalhador economiza cada ano Cr$ 280,00, que são 35 % do seu salário; quanto ganha êle por ano ?
Resp. Cr$ 800,00

9. Um proprietário comprou uma casa que aluga anualmente por Cr$ 1152,00. Este aluguel, sendo 9 % do custo da casa, pergunta-se por quanto a comprou êle ?
Resp. Cr$ 12800,00

10. Pus no banco certa quantia que a 5 % me rende anualmente Cr$ 325,00; qual é a quantia ? Resp. Cr$ 6500,00

As três fórmulas da porcentagem

275. Damos ao lado as fórmulas das três regras principais que apresentamos sôbre a porcentagem. Substituindo os nomes pelos respetivos valores, e efetuando a operação, obteremos o resultado de qualquer problema desta natureza.

$$\text{Porcentagem} = \frac{\text{Principal} \times \text{taxa}}{100}$$

$$\text{Taxa} = \frac{\text{Porcentagem} \times 100}{\text{principal}}$$

$$\text{Principal} = \frac{\text{Porcentagem} \times 100}{\text{taxa}}$$

Achar o principal quando êle está somado à porcentagem

276. Podemos achar também o principal, quando êle está somado à porcentagem em uma só quantidade; neste caso temos de operar do seguinte modo:

Problema. Vendi um cavalo por Cr$ 276,00 e ganhei na venda 15 %; quanto me custou o cavalo ?

Solução. O custo do cavalo somado ao lucro ou porcentagem é Cr$ 276,00; multiplicando esta quantia por 100, e dividindo o produto 100 + 15, que são 115, teremos o quociente Cr$ 240,00, que é o custo do cavalo.

Processo

$$\frac{276,00 \times 100}{100 + 15} = 240,00$$

Regra. *Para se achar o principal, quando êle está somado à porcentagem, multiplica-se a soma dada por 100, e divide-se o produto por 100 mais a taxa.*

Demonstração da regra. A proporção dêste problema é a seguinte: 100 + 15, que é o principal e a porcentagem, está para Cr$ 276,00, que é a sôma do principal e porcentagem, assim como 100, que é só o principal, está para x, que é também só o principal; $100 + 15 : 276,00 :: 100 : x$.

Para achar o valor de x, temos de multiplicar Cr$ 276,00 por 100, e dividir o produto por 100 + 15; ora, Cr$ 276,00 é a soma dada, e 115 é a soma de 100 mais a taxa; logo, *multiplicando a soma dada por 100, e dividindo o produto por 100 mais a taxa, acharemos o principal.*

1. Certo número mais a porcentagem de 8 % é 999; qual é o número? Resp. 925

2. Dizei-me que número somado à porcentagem de $5\frac{1}{2}$ % soma 422? Resp. 400

3. Dizei-me qual é o número que somado aos seus 25 %, soma 2275? Resp. 1820

4. A população de uma cidade é de 8250 habitantes e tem agora 20 % mais do que há 5 anos; qual era a população naquele tempo? Resp. 6875

5. A frequência regular de certa escola é de 120 alunos, mas 20 % dos alunos matriculados está ausente; qual é o número de matriculados? Resp. 150

Fórmula para achar o principal, quando êle está somado à porcentagem:

$$\text{Principal} = \frac{\text{Total} \times 100}{100 + \text{taxa}}$$

Achar a porcentagem por meio das frações decimais

277. Podemos, também obter a porcentagem por meio das frações decimais, porque a taxa de 1 % quer dizer 1 em cada cem, ou a centésima parte ou 0,01. Do mesmo modo,

2 % = 0,02	5 % = 0,05	50 % = 0,50
3 % = 0,03	10 % = 0,10	75 % = 0,75
4 % = 0,04	15 % = 0,15	120 % = 1,20

278. Se a taxa é um número fracionário, como $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{4}$, $6\frac{1}{8}$, etc., reduz-se a fração a uma decimal como

$$4\tfrac{1}{2}\ \% = 0{,}045,$$
$$5\tfrac{1}{4}\ \% = 0{,}0525,$$
$$6\tfrac{1}{8}\ \% = 0{,}06125, \text{ etc.}$$

Problema. Quanto é 8 % de 150?

Solução. 8 % é o mesmo que 0,08. Multiplicando 150 por 8, o produto é 1200. Como há dois algarismos decimais no multiplicador, cortam-se dois algarismos no produto, e o resultado é 12. Portanto,

$$8\ \%\ \text{de}\ 150 = 150 \times 0{,}08 = 12.$$

Processo

```
  1 5 0
  0,0 8
 ------
 1 2,0 0
```

Rogra. *Acha-se a porcentagem, reduzindo a taxa a uma fração decimal, e multiplicando por ela o principal.*

Achar as seguintes porcentagens por meio das frações decimais:

1. 5 % de 800.	Resp. 40	6. 9 % de 350.	?
2. 4 % de 50.	" 2	7. 12 ½ % de 6400.	?
3. 5 % de 120.	" 6	8. 20 % de Cr$ 100,00	?
4. 3 % de 500.	" 15	9. 25 % de Cr$ 400,00	?
5. 4 ½ % de 800.	" 36	10. 90 % de Cr$ 1000,00	?

Reduzir a taxa à fração ordinária equivalente

279. Uma taxa qualquer pode ser fàcilmente reduzida a uma fração ordinária que exprime exatamente o seu valor.

Problema. Qual é a fração ordinária equivalente a 75 % ?

Solução. 75 % quer dizer 75 em cada 100 ou 75 centésimos. Escreve-se 75 como numerador, e 100 como denominador, e simplifica-se a fração que fica reduzida a $\frac{3}{4}$.

$$\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

Regra. *Para se reduzir uma taxa a uma fração ordinária equivalente, escreve-se a taxa como numerador e o número 100 como denominador, e simplifica-se a fração resultante, se fôr redutível.*

Reduzir as seguintes taxas a frações ordinárias equivalentes:

1. 10 %.	Resp. $\frac{1}{10}$	5. 12 %.	Resp. $\frac{3}{25}$	9. 85 %.	Resp. ?
2. 4 %.	" $\frac{1}{25}$	6. 125 %.	" $1\frac{1}{4}$	10. 30 %.	" ?
3. 20 %.	" $\frac{1}{5}$	7. 8 %.	" $\frac{2}{25}$	11. 45 %.	" ?
4. 50 %.	" $\frac{1}{2}$	8. 2 %.	" $\frac{1}{50}$	12. 90 %.	" ?

Reduzir uma fração ordinária à taxa equivalente

280. Este processo opera-se de um modo inverso ao precedente.

Problema. A fração $\frac{3}{4}$ a quantos por cento corresponde?

Solução. Multiplicando o numerador por 100, temos 300; dividindo-o depois pelo denominador, temos 75. A taxa de porcentagem é 75 %.

$$\frac{3}{4} = (300 \div 4)\ \% = 75\ \%$$

Regra. *Para se mudar uma fração ordinária em uma taxa equivalente, multiplica-se o numerador por 100, e divide-se o produto pelo denominador e o quociente será a taxa equivalente.*

Reduzir as seguintes frações a taxas equivalentes:

1. $\frac{1}{4}$. Resp.	25 %	5. $\frac{5}{4}$. Resp.	125 %	9. $\frac{3}{10}$. Resp.	?
2. $\frac{1}{5}$. "	20 %	6. $\frac{1}{20}$. "	5 %	10. $\frac{5}{10}$. "	?
3. $\frac{1}{2}$. "	50 %	7. $\frac{5}{8}$. "	$62\frac{1}{2}$ %	11. $\frac{7}{8}$. "	?
4. $\frac{7}{10}$. "	70 %	8. $\frac{3}{4}$. "	75 %	12. $\frac{11}{20}$. "	?

JUROS

281. Juro é uma palavra usada para se designar o lucro que se dá pelo uso do dinheiro que se tomou emprestado.

O juro pode, pois, ser considerado o aluguel do dinheiro.

Os cálculos de juros são da mesma natureza que os de porcentagem, mas como em juros temos de empregar uma nova quantidade, que é o tempo ou prazo a que se empresta o dinheiro, e que pode ser maior ou menor do que um ano, esta nova quantidade altera um pouco as regras de juros, e neste ponto elas diferem alguma cousa das regras de porcentagem.

Nota. Aqueles que teem dinheiro disponível, poem-no a juros no banco ou em mão de pessoas particulares, onde renda algum lucro; do mesmo modo, aqueles que precisam de dinheiro para negócios e empresas lucrativas, emprestam-no dos bancos ou de capitalistas, pagando juros da quantia emprestada. Daquí vem o comércio bancário, e todos os mais negócios de dinheiro.

282. Em juros temos de considerar: O capital, a taxa, os juros e o tempo.

Capital ou **principal** é a quantia que se dá ou toma a juros. Da palavra capital vem o nome de capitalista, dado àqueles que emprestam capitais.

Taxa é o número que indica a quantos por cento foi emprestado o capital.

Juro ou **prêmio** é a porcentagem ou a quantia que o capital rende, enquanto está emprestado.

Tempo é o prazo a que se empresta o dinheiro.

283. A taxa de juros não é fixa; varia muito conforme a natureza do negocio o ajuste prévio dos contraentes.

Nota. A lei estatue a taxa máxima de juros e os juros sobre esta taxa teem o nome de juros da lei. Mas é permitido dar dinheiro a premio sôbre outra taxa menor.

Chama-se *usura* qualquer taxa superior à que é marcada por lei.

Aquele que exige uma taxa superior à legal, é reputado como usurário, e pode ser processado.

284. Os juros podem ser juros simples e juros compostos ou capitalizados.

Os juros são simples, quando durante todo o tempo da transação, nunca se juntam ao capital para também vencer juros.

Os juros são compostos, quando, no fim de um tempo determinado, os juros já vencidos são unidos ao capital, para dalí por diante também vencer juros, e neste caso, teem também o nome de **juros capitalizados.**

Juros simples

285. Em juros simples há, como já dissemos, quatro quantidades a considerar, que são: capital, taxa, juros e tempo.

Dadas três destas quantidades, podemos facilmente achar a outra.

Nota. No comércio e nas transações bancárias, o ano é considerado como tendo 360 dias, e o mês 30 dias; nesta suposição se teem de fazer todos os calculos de juros.

Problema. Quais são os juros de Cr$ 360,00 a 5 %, em 3 anos, 5 meses e 10 dias ?

Solução. Multiplicando o capital pela taxa e dividindo o produto por 100, temos os juros de um ano, que são Cr$ 18,00. Multiplicando os juros de 1 ano por 3, teremos os juros de 3 anos que são Cr$ 54,00. Para achar os juros de 5 meses, dividiremos os juros de 1 ano por 12; e teremos Cr$ 1,50 juros de 1 mês; multiplicando agora os juros de 1 mês por 5, teremos os juros de 5 meses, que são Cr$ 7,50. Para achar os juros de 10 dias, dividiremos os juros de 1 mês por 30, e teremos os juros de 1 dia, e multiplicando os juros de 1 dia por 10, teremos os juros de 10 dias, que são Cr$ 0,50. Os juros de 3 anos, 5 meses e 10 dias são, pois Cr$ 62,00.

Processo

```
                       360,00
                            5 %
                    ----------
Juros de 1 ano   =   18,0000
                            3
                    ----------
Juros de 3 anos  =    54,00 )
Juros de 5 meses =     7,50 (
Juros de 10 dias =     0,50 )
                    ----------
Total dos juros  =    62,00
```

Regra. *Para se acharem os juros, multiplica-se o capital pela taxa; divide-se depois o produto por 100, e multiplica-se o resultado pela quantidade do tempo.*

1. Quais são os juros de Cr$ 100,00 a 5%, em 2 anos ?
Resp. Cr$ 10,00.

2. Quais são os juros de Cr$ 480,00 a 6%, em 5 anos ?
Resp. Cr$ 144,00.

3. Quais são os juros de Cr$ 700,00 a 5%, em 7 anos ?
Resp. Cr$ 245,00.

4. Quais são os juros de Cr$ 680,00 a 6%, em 5 anos ?
Resp. ?

5. Quais são os juros de Cr$ 750,00 a 3%, em 5 anos? Resp.?
6. Quais são os juros de Cr$ 500,00 a 8%, em 9 anos? Resp.?

Observação. No problema que resolvemos acima, operamos com a quantidade de tempo pelo modo mais natural e compreensível, para aqueles que começam esta espécie de cálculos, mas o método que deve ser preferido é o das **partes alíquotas** que facilita consideravelmente o processo, evita restos nas divisões e dá o resultado final com mais precisão. O método das partes alíquotas é o seguinte:

1 mês é $\frac{1}{12}$ de um ano,
2 meses são $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ de um ano,
3 meses são $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ de um ano,
4 meses são $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ de um ano,
6 meses são $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ de um ano,
8 meses são $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ de um ano,
9 meses são $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ de um ano,
10 meses são $\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$ de um ano,

Multiplicando, pois, os juros de *um ano* por $\frac{1}{2}$, temos os juros de 6 meses; multiplicando-os por $\frac{1}{3}$, temos os juros de 4 meses; multiplicando-os por $\frac{1}{4}$ temos os juros de 3 meses, etc.

1 dia é $\frac{1}{30}$ de um mês,
2 dias são $\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ de um mês,
3 dias são $\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$ de um mês,
4 dias são $\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$ de um mês,
5 dias são $\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ de um mês,
6 dias são $\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$ de um mês,
9 dias são $\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$ de um mês,
15 dias são $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$ mês, etc.

Multiplicando, pois, os juros de *um mês* por $\frac{3}{10}$ temos os juros de 9 dias; multiplicando-os por $\frac{1}{6}$, temos os juros de 5 dias, etc. (Vêde ns. **157** e **229**).

Resolver os seguintes problemas, operando nas frações de um ano com partes alíquotas:

1. Achar os juros de Cr$ 317,50, em 1 ano e 4 meses, a 6 % ao ano. Resp. Cr$ 25,40.
2. Quais são os juros de Cr$ 1970,00 em 5 anos a 9 % ? Resp. Cr$ 886,50
3. Quais são os juros de Cr$ 8400,00 em 1 ano, 7 meses e 15 dias a 7 % ? Cr$955,50.
4. Quais são os juros de Cr$ 400,00 em 8 anos e 6 meses a 10 % ? Resp. Cr$ 340,00
5. Achar os juros de Cr$ 1200,00 em 2 anos e 9 meses a 1 % ao ano. Resp. Cr$ 33,00.
6. Achar os juros de Cr$ 360,00 em 3 anos, 7 meses e 15 dias a 4 % ao ano. Resp. Cr$ 52,20.

Achar os juros conhecidos os dados seguintes:

	Principal	Taxa	Tempo	Juros
7.	Cr$ 100,00	8 %	2 anos	Resp. Cr$ 16,00
8.	Cr$ 300,00	5 %	4 " e 6 meses	" Cr$ 67,50
9.	Cr$ 2500,00	7 %	2 " e 3 "	" Cr$ 393,50
10.	Cr$ 125,00	6 %	5 " e 4 "	" Cr$ 40,00
11.	Cr$ 355,00	7 %	2 "	" Cr$ 49,70

	Principal	Taxa	Tempo		Juros
12.	Cr$ 280,00	7 %	2 anos e 6 meses	Resp.	Cr$ 49,00
13.	Cr$ 4375,00	8 %	2 " e 3 "	"	Cr$ 787,50
14.	Cr$ 450,00	8 %	6 " e 7 "	"	?
15.	Cr$ 50,00	6 %	1 " e 9 "	"	
16.	Cr$ 150,00	6 %	1 " e 2 "	"	
17.	Cr$ 180,00	10 %	2 " e 11 "	"	
18.	Cr$ 1296,00	8 %	5 " 10 m. e 15 d.	"	

Achar a taxa

286. Os seguintes problemas dão o capital, os juros e o tempo e requerem a taxa.

Problema. A que taxa devo emprestar o capital de Cr$ 450,00 para render Cr$ 90,00 em 4 anos ?

Solução. Os juros de 4 anos são Cr$ 90,00 dividindo estes juros por 4, temos Cr$ 22,50, que são os juros de 1 ano. Neste ponto, temos o problema igual ao de porcentagem, (n.º 273). Multiplicam-se os juros de 1 ano por 100, divide-se o produto pelo capital, e o quociente 5 será a taxa.

Processo

$90,00 \div 4 = 22,50$

$2250 \div 450 = 5\ \%$

Regra. *Para se achar a taxa dos juros dividem-se os juros pelo tempo; o quociente multiplica-se por 100, e o produto dividido pelo capital dará a taxa.*

Nota. A demonstração desta regra acha-se nos problemas de porcentagem (n.º 273).

1. A que taxa se devem emprestar Cr$ 50,00, para renderem Cr$ 30,00 em 10 anos ? Resp. 6 %.

2. A que taxa se devem emprestar Cr$ 150,00, para renderem Cr$ 45,00 em 5 anos ? Resp. 6 %.

3. A que taxa devo emprestar Cr$ 350,00, para renderem outros Cr$ 350,00 em 8 anos e 4 meses ? Resp. 12 %.

Nota. 4 meses são $\frac{1}{3}$ de um ano; então o tempo é $8\frac{1}{3}$ anos.

4. A que taxa devo emprestar Cr$ 1000,00, para render igual quantia em 20 anos ? Resp. 5 %.

Achar o tempo

287. Os seguintes problemas dão o capital, a taxa e os juros, e requerem o tempo.

Problema. Emprestei a um indivíduo Cr$ 250,00, a juro de 6 % ao ano; recebi de juros Cr$ 45,00; quanto tempo teve êle o dinheiro ?

Solução. Multiplicando o capital pela taxa, e dividindo o produto por 100, temos Cr$ 15,00 que são os juros do 1 ano. Dividindo agora os juros do problema pelos juros de 1 ano, temos o quociente 3, que é o número de anos.

Processo

$$\frac{250 \times 6}{100} = 15$$

$45 \div 15 = 3$

Regra. *Para se achar o tempo, dividem-se os juros dados pelos juros de um ano, e o quociente será o tempo requerido.*

1. Em que tempo Cr$ 1250,00, a 6% rendem Cr$ 412,50? Resp. $5\frac{1}{2}$ anos.

2. Em que tempo Cr$ 750,00, a 8 %, rendem Cr$ 90,00 de juros? Resp. $1\frac{1}{5}$ ano.

3. Em que tempo Cr$ 500,00 a 7%, rendem Cr$ 157,50 de juros? Resp. 4 anos e 6 meses.

Nota. Quando a solução apresenta um número misto, isto é, inteiro e fração, reduz-se o número a um número complexo (n.º **230**). Neste problema, o tempo é $2\ \frac{875}{3500}$; esta fração simplificada dá $\frac{1}{4}$; então temos 2 anos, e como $\frac{1}{4}$ de um ano são 3 meses, o tempo é 2 anos e 3 meses.

4. Em que tempo Cr$ 600,00, a 9 %, rendem Cr$ 270,00 de juros? Resp. 5 anos.

Achar o capital

288. Os seguintes problemas dão a taxa, os juros e o tempo; requerem o capital que produziu os juros.

Problema. Que capital renderá Cr$ 90,00 em 4 anos a 5 %?

Solução. Dividindo os juros de 4 anos por 4, temos Cr$ 22,50, que são os juros de 1 ano. Multiplicando os juros de 1 ano por 100 e dividindo o produto pela taxa, que é 5, temos Cr$ 450,00 que é o capital (Vêde n.º **274**).

Processo

$$90,00 \div 4 = 22,50$$

$$\frac{22,50 \times 100}{5} = 450,00$$

Regra. *Para se achar o capital, dividem-se os juros pelo tempo e o quociente multiplicado por 100 e depois dividido pela taxa, dá o capital.*

1. Certa quantia a 6 % ao ano rendeu Cr$ 49,50 de juros em 3 anos; qual era a quantia? Resp. Cr$ 275,00

2. Que capital a 10 % rende Cr$ 440,00 em 5 anos? Resp. Cr$ 880,00

3. Que quantia a 5 % rende Cr$ 149,40 de juros em 4 anos? Resp. Cr$ 747,00

4. Certo indivíduo conseguiu ganhar uma quantia que, posta no banco a 6 %, rendia-lhe Cr$ 900,00 por ano; qual era a quantia? Resp. Cr$ 15000,00.

Juros compostos ou capitalizados

289. Muitas vezes o capitalista e o devedor anuem a que os juros vencidos, em lugar de serem pagos anualmente, sejam

unidos ao capital para também vencer juros, e neste caso, chamam-se juros de juros, ou capitalizados.

A palavra capitalizar quer dizer reunir os juros ao capital para também vencerem juros.

Problema. Emprestei Cr$ 7500,00 a juros de 8% por 3 anos, para os juros serem capitalizados no fim de cada ano. Quero saber quanto tenho de receber no fim de 3 anos, além do capital.

Solução. O capital emprestado é Cr$ 7500,00; juntando agora os juros de 1 ano, temos Cr$ 8100,00, que é o capital do 2.º ano. Os juros do 2.º ano são Cr$ 648,00, estes juntos com o Cr$ 648,00, estes, juntos com o seu capital, faz em Cr$ 8748,00 que é o capital do 3.º ano. Este capital vence durante êste ano os juros de Cr$ 699,84, os quais juntos com o capital fazem Cr$ 9447,84.

Subtraindo dêste o capital emprestado, que é Cr$ 7500,00 temos como resultado Cr$ 1947,84, que são os juros compostos de Cr$ 7500,00 em 3 anos, a 8 % e capitalizados anualmente.

Capital emprestado,	7500,00
	8 %
Juros do 1.º ano,	600,0000
	7500,00
Capital do 2.º ano,	8100,00
	8 %
Juros do 2.º ano.	648,0000
	8100,00
Capital do 3.º ano,	8748,00
	8 %
Juros do 3.º ano,	699,8400
	8748,00
Capital e juros,	9447,84
Capital emprestado,	7500,00
Juros compostos,	1947,84

Regra. *Para se achar os juros compostos, procuram-se os juros do capital emprestado no primeiro ano, e estes juros, somados com a quantia emprestada, formarão o capital do segundo ano.*

Acham-se os juros do segundo ano, e estes somados com o capital do segundo ano, formam o capital do terceiro ano, e assim por diante.

Da última soma do capital e juros subtrai-se o capital emprestado, e o resto serão juros compostos.

1. Quais são os juros de Cr$ 15.000,00, a 6 %, em 3 anos, capitalizando-se os juros de ano em ano? Resp. Cr$ 2865,24.

2. Qual é a soma dos juros compostos de Cr$ 5000,00 a 6% em 3 anos, com o seu capital? Resp. Cr$ 5950,08.

3. Achar os juros de Cr$ 200,00, em 3 anos, a 8 % capitalizando-os de ano em ano? Resp. Cr$ 51,94.

Achar os juros por meio do divisor fixo

290. Há um método muito fácil de achar os juros, que tem o nome de **divisor fixo.** Este método consiste em multiplicar o

capital pelo número de dias decorridos, e depois dividir o produto pelo divisor fixo da taxa.

Ilustração. Cada taxa tem o seu divisor fixo que se obtém multiplicando 360 (número de dias de um ano comercial) por 100, e dividindo o produto pela taxa. Assim o divisor fixo de 15 % é $\frac{360 \times 100}{15} = 2400$.

Do mesmo modo, o divisor fixo

de 1 % é 36000	de 5 % é 7200	de 9 % é 4000
de 2 % é 18000	de 6 % é 6000	de 10 % é 3600
de 3 % é 12000	de 7 % é 5142	de 11 % é 3272
de 4 % é 9000	de 8 % é 4500	de 12 % é 3000

291. O divisor fixo tem por fim abreviar o processo do calculo. Achando-se o número de dias e o divisor fixo, a operação torna-se fácil, porque se evita o processo de achar os juros de meses e dias. Os guarda-livros empregam êste processo, porque lhes facilita muito a extração das contas correntes com juros.

Problema. Quais são os juros de Cr$ 36,00 a 5 % em 3 anos, 5 meses e 10 dias ?

Solução. 3 anos, 5 meses e 10 dias, reduzidos a dias são 1240 dias (n.° 227). Multiplicando o capital Cr$ 36,00 por 1240 dias, teremos 44640000; dividindo êste produto pelo divisor fixo de 5 %, que é 7200, teremos Cr$ 6,20, juros de 3 anos, 5 meses e 10 dias.

Processo

$$\frac{36,00 \times 1240}{7200} = 6,20$$

Regra. *Para se achar os juros vencidos em qualquer tempo, multiplica-se o capital pelo número de dias, e divide-se o produto pelo divisor fixo da taxa.*

1. Quais são os juros de Cr$ 336,00 a 5 % ao ano em 15 dias ?
Resp. Cr$ 0,70.

2. Achar as juros de Cr$ 511,70 em 9 meses e 29 dias, a 4 % ao ano.
Resp. Cr$ 17,00.

3. Achar os juros de Cr$ 2000,00 em 45 dias, a 12 % ao ano.
Resp. Cr$ 30,00.

REGRA DE SOCIEDADE

292. Sociedade comercial é um contrato entre duas ou mais pessoas, que se propõem a negociar, sujeitando-se aos lucros ou às perdas que houver no negócio.

Capital é o dinheiro empregado no negócio. A parte de cada sócio é a *entrada* dêsse sócio.

Lucros são os ganhos que há no negocio.

Perdas são os prejuizos que há, quando corre mal o negócio.

Nota. Os lucros são divididos entre os sócios, segundo as condições estipuladas no contrato da sociedade; mas geralmente são divididos na proporção das entradas e do tempo em que cada sócio permaneceu no negócio.

293. Os problemas da sociedade comercial são *simples* ou *compostos*.

São simples quando só as entradas dos sócios diferem, sendo o tempo o mesmo para *todos*, ou então, quando as entradas são iguais mas os sócios ficam no negócio tempos diferentes. São compostos, quando as entradas e os tempos são desiguais.

Regra de sociedade simples

294. Os problemas seguintes são da mesma natureza que os da divisão em partes proporcionais expostos no n.º 265.

Problema. *A* e *B* fizeram uma sociedade; *A* entrou com Cr$ 648,00 e *B* com Cr$ 1080,00; o lucro foi de Cr$ 432,00; qual é a parte de cada um ?

Solução. Quando o tempo é o mesmo mas as entradas são diferentes, dividimos o lucro ou prejuizo em partes proporcionais às entradas dos sócios. Assim, a soma dos capitais está para o o lucro que se tem a dividir, como a entrada de cada sócio está para a sua parte no lucro. Como há 2 sócios, formam-se duas proporções. Chamando x a parte do sócio *A* e y a parte do sócio *B* e resolvendo as duas prporções, veremos que a parte de *A* é Cr$ 162,00 e a de *B* é Cr$ 270,00.

Processo

$1728 : 432 :: 648 : x$
$1728 : 432 :: 1080 : y$

$x = 162$
$y = 270$

A parte de *A* é Cr$ 162,00
A parte de *B* é Cr$ 270,00

Soma das partes Cr$ 432,00

Regra. *Para se obter a parte de um sócio, acha-se o 4.º termo de uma proporção, na qual a soma dos capitais é o primeiro termo, o lucro total é o segundo e o capital do sócio é o terceiro.*

Forma-se uma proporção semelhante para cada sócio, e esta, depois de resolvida, mostrará a parte que lhe pertence.

Nota. Podemos resolver êste problema também pelo método de frações exposto no n.º 267. A soma dos capitais sendo 648,00 + 1080,00 = 1728,00, a parte de um sócio é $\frac{648}{1728} = \frac{3}{8}$ e a do outro é $\frac{1080}{1728} = \frac{5}{8}$. Ora, $\frac{3}{8}$ de Cr$ 432,00 = Cr$ 162,00 e $\frac{5}{8}$ de Cr$ 432,00 = Cr$ 270,00.

1. João e Pedro associaram-se em certo negócio; João entrou com Cr$ 1200,00 e Pedro com Cr$ 1300,00, e perderam Cr$ 500,00; qual é a parte que cada um teve nos prejuizos ?
Resp. João perdeu Cr$ 240,00 e Pedro Cr$ 260,00.

2. *A*, *B* e *C* formaram uma sociedade, para a qual *A* entrou Cr$ 4000,00; *B* com Cr$ 6000,00 e *C* com Cr$ 7000,00, e ganharam Cr$ 5100,00, que parte dos lucros deve tocar a cada um?

Resp. *A* Cr$ 1200,00; *B* Cr$ 1800,00 e *C* Cr$ 2100,00.

Problema II. *A* iniciou um negócio e três meses depois admitiu *B* para sócio com entrada igual à sua. Um ano após haver iniciado o negócio, verificou-se um lucro de Cr$ 8400,00. Qual a parte de cada sócio?

Solução. Neste caso em que as entradas são iguais, mas os tempos são diferentes, dividimos o lucro ou prejuízo em partes proporcionais aos tempos, isto é, a 12 meses e 9 meses. Chamando x a parte do sócio *A* e y a parte do sócio *B*, formamos as duas proporções de onde se tiram os valores de x e de y. Encontramos Cr$ 4800,00 para o lucro de *A* e Cr$ 3600,00 para o lucro de *B*.

$$21 : 8400 :: 12 : x$$
$$21 : 8400 :: 9 : y$$
$$x = 4800$$
$$y = 3600$$

A parte de *A* é	Cr$ 4.800,00
A parte de *B* é	Cr$ 3.600,00
Soma das partes	Cr$ 8.400,00

Regra de sociedade composta

295. Os problemas compostos de sociedade comercial podem ser facilmente reduzidos a problemas simples.

Problema. *A* e *B* formaram uma sociedade. *A* entrou com Cr$ 400,00 por 8 meses, e *B* com Cr$ 600,00 por 4 meses; ganharam no negócio Cr$ 350,00; qual deve ser a parte de cada um?

Solução. Neste caso, o lucro depende do capital e do tempo. O emprêgo de Cr$ 400,00 em 8 meses pode ser considerado como Cr$ 400,00 × 8 = = Cr$ 3200,00 em um mês e Cr$ 600,00 em 4 meses pode ser considerado como Cr$ 600,00 × 4 = Cr$ 2400,00 em um mês. Reduzida assim a questão a tempos iguais, a divisão dos lucros deve ser feita na proporção de Cr$ 3200,00 e de Cr$ 2400,00. Somando os dois capitais, temos Cr$ 5600,00; então, a proporção será a seguinte

$$5600 : 350 :: 3200 : x$$
$$5600 : 350 :: 2400 : y$$
$$x = 200$$
$$y = 150$$

A parte de *A* é Cr$ 200,00, e a de *B* é Cr$ 150,00.

Regra. *Multiplica-se cada capital pelo tempo em que foi empregado; consideram-se estes produtos como os seus respectivos capitais, e procede-se como nos problemas simples.*

1. Antônio e José empreitaram certo trabalho por Cr 82,00. Antônio trabalhou na empreitada 5 dias com 4 homens, e José trabalhou 7 dias com 3 homens. Que parte deve receber cada um?

Resp. *A.* Cr$ 40,00 e *J.* Cr$ 42,00.

2. *A*, *B* e *C* fizeram uma sociedade. *A* entrou com Cr$500,00 por 9 meses; *B* com Cr$ 700,00 por um ano, e *C* com Cr$ 400,00 por 15 meses, ganhando êles Cr$ 567,00. Que parte dos lucros deve receber cada um?

Resp. *A* Cr$ 135,00, *B*, Cr 252,00 e *C*, Cr$ 180,00.

3. João, Francisco e Malaquias estabeleceram um negócio. João entrou com Cr$ 300,00 por 7 meses; Francisco com Cr$ 500,00 por 8 meses, e Malaquias com Cr$ 200,00 por 12 meses; ganhando êles Cr$ 850,00 que parte dos lucros deve receber cada um? Resp. *J.* Cr$ 210,00, *F.* Cr$ 400,00 e *M.* Cr$ 240,00.

COMISSÕES

296. Comissão é a quantia cobrada pelos comissários ou correspondentes pelo trabalho de vender ou comprar mercadorias ou fazer quaisquer transações por conta dos seus comitentes.

Comissário ou consignatário é o negócio que recebe mercadoria para vender ganhando comissão.

Comitente é a pessoa que manda qualquer mercadoria a um comissário para ser vendida por sua conta, pagando-lhe depois comissão pelo seu trabalho.

Em geral, a comissão é estipulada em forma de porcentagem.

Problema. Um fazendeiro mandou ao seu comissário um carregamento de café que foi vendido por Cr$ 1800,00; quanto ganhou o comissário, cobrando 3 %?

Solução. O processo é muito simples, porque 3 % de Cr$ 1800,00 são Cr$ 54,00, que foi a comissão que recebeu o consignatário.

$$\begin{array}{r} 180000 \\ 3 \\ \hline 540000 \end{array}$$

1. Um comissário vendeu por Cr$ 4600,00 uma remessa de café que lhe veio à consignação; quanto é a sua comissão de 3 %? Resp. Cr$ 138,00.

2. Um comissário vendeu um carregamento de algodão por Cr$ 5678,00, cobrando êle a comissão de 5 %, quanto recebeu? Resp. Cr$ 283,90.

3. Quanto é Cr$ 280,00 menos a comissão de 5 %? Resp. Cr$ 266,00.

4. Um fazendeiro mandou ao seu comissário um carregamento de café que foi vendido por Cr$ 3200,00; pagando de comissão 3 %, quanto recebeu líquido? Resp. Cr$ 3104,00.

ABATIMENTO e DESCONTO

297. Chama-se **abatimento** a redução do preço de uma mercadoria. Assim, quando se compra em grande porção, isto é, por atacado, goza-se de abatimento; também as mercadorias avariadas são geralmente vendidas com abatimento.

A importância mencionada num documento de dívida (letra, saque ou duplicata) é o **valor nominal**; a data em que há de ser paga é o **vencimento**. Mas, si a dívida é paga antes do vencimento, ela sofre uma redução que se chama **desconto**. A diferença entre o valor nominal e o desconto é o **valor atual**. Pode-se dizer, então, que valor atual é aquele que a letra tem no momento de ser descontada.

Há dois modos de efetuar o desconto: um denomina-se desconto por fora, e outro, desconto por dentro.

Desconto por fora

298. O desconto por fora consiste em abater uns tantos por cento, no valor nominal da letra. Este é o método geralmente em uso no comércio.

Problema. Um negociante tinha uma letra do valor de Cr$ 700,00 que se vencia no prazo de um ano, e precisando de dinheiro, foi descontá-la em um banco que lhe cobrou 8%; quanto recebeu êle pela letra ?

Solução. 8 % de Cr$ 700,00 são Cr$ 56,00. Deduzindo agora Cr$ 56,00 de Cr$ 700,00 restam Cr$ 644,00 que foi quanto êle recebeu.

```
 700,00        700,00
    8 %         56,00
--------       ------
56,0000        644,00
```

Regra. *Para se achar o valor atual de uma letra, acha-se o desconto e subtrai-se do valor nominal.*

1. Qual é o valor atual de uma letra do valor nominal de Cr$ 1750,00 que vai ter desconto de 9 % ? Resp. Cr$ 1952,50.

2. Descontando-se 12 % em Cr$ 480,00, que quantia restará ? Resp. Cr$ 422,40.

Uma letra de Cr$ 800,00 foi descontada 9 meses antes do vencimento à taxa de 6 % ao ano.

Quanto produziu a letra (valor atual)? Resp. Cr$ 764,00.

Desconto por dentro

299. No desconto por dentro procura-se a quantia que, posta a juros até o fim do prazo da letra e somada aos juros produzidos, perfaça o valor nominal da letra.

Ilustração. Um negociante tinha uma letra do valor de Cr$ 540,00 a vencer-se no prazo de um ano, e foi descontá-la em uma casa bancária com a taxa de 8 % e recebeu Cr$ 500,00. Ora Cr$ 500,00 a 8 % rendem em um ano Cr$ 40,00, juntando agora o capital temos Cr$ 540,00, valor nominal da letra. Fazer o desconto por dentro é o mesmo que achar o capital quando êle está reunido com os juros (Vêde n.º 113).

Problema. Qual é o valor atual de uma letra de Cr$ 540,00 que tem o prazo de um ano, fazendo-se o desconto por dentro de 8 % ?

Solução. 108 que é um capital mais os juros de 8 % está para Cr$ 540,00, que também é um capital e mais os juros de 8 %, assim como 100, que é o capital sem juros, está para x, que é também o capital sem juros.

$$100 + 8 : 540 :: 100 : x$$

$$x = \frac{540 \times 100}{100 + 8} = 500$$

Regra. *Para se achar o valor atual de uma letra com um ano de prazo empregando o desconto por dentro multiplica-se o valor nominal por 100, e divide-se o produto por 100 mais a taxa.*

Nota. Quando o tempo é mais de um ano, inclue-se na taxa; assim 6 % em 2 anos é o mesmo que 12 % em um ano; 6 % em 3 anos é o mesmo que 18 % em um ano. Do mesmo modo 6 % em 6 meses é o mesmo que 3 %.

1. Achar o valor atual de uma letra de Cr$ 81,00, que se vence em 2 anos, sendo o desconto feito a razão de 4 % ao ano. Resp. Cr$ 75,00.

2. Se o dinheiro rende 12 % ao ano, qual é o valor atual de Cr$ 235,20, pagáveis de hoje a um ano? Resp. Cr$ 210,00.

3. Achar o valor atual de um crédito de Cr$ 224,00, pagáveis no fim de 2 anos, sendo a taxa de desconto de 6 % ao ano. Resp. Cr$ 200,00.

MÉDIA ARITMÉTICA

300. O termo medio ou *média* de dois ou mais números é outro número que se forma dos números dados e está compreendido entre o maior e o menor dêles.

Chama-se **média aritmética** de duas ou mais quantidades, o quociente que se obtém dividindo-se a soma das quantidades pelo número delas.

Problema. Qual é a média aritmética de 4, 9, 12 e 15?

Solução. A soma dos números é 40, êles são 4; dividindo agora 40 por 4 o quociente é 10. Então 10 é a média aritmética de 4, 9, 12 e 15.

$$\frac{4 + 9 + 12 + 15}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

Regra. *Para se achar a média aritmética de duas ou mais quantidades, somam-se as quantidades, e divide-se a soma pelo número das quantidades somadas.*

Nota. A média aritmética é muito usada na estatística, nas observações científicas, no comércio, etc.

Para se indicar a temperatura de um dia, dá-se a média da temperatura observada em diferentes horas dêsse dia. Para se indicar a mortalidade de um período de dias ou meses, dá-se o número médio dos óbitos que ocorreram nesses dias ou meses.

1. Qual é a média aritmética de 4, 6, 10 e 12? Resp. 8.
2. Qual é a média aritmética de 45, 50, 54, 60, 62 e 65? Resp. 56.

3. Qual é a média aritmética de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$? Resp. $\frac{5}{16}$.

4. Durante certo mês o preço do café variou do seguinte modo: Cr$ 5,20, Cr$ 5,40, Cr$ 5,60 e Cr$ 5,80. Qual foi o preço médio do café nesse mês? Resp. Cr$ 5,50.

5. Um regimento andou no seu primeiro dia de marcha 19 quilômetros; no segundo, 22; no terceiro, 26; no quarto, 25; no quinto, 23, e chegou ao seu destino. Qual foi a distância média que andou cada dia? Resp. 23 km.

PRAZO MÉDIO

301. Chama-se **prazo médio** o tempo em que, de uma só vez se pode fazer o pagamento de diversas quantias que se devem a prazos diversos, sem haver prejuizo algum para o credor, nem para o devedor.

Problema. Um lavrador tem de fazer a um capitalista três pagamentos do seguinte modo: Cr$ 400,00, no fim de 9 meses; Cr$ 800,00 no fim de 6 meses, e Cr$ 600,00 no fim de 4 meses; mas querendo pagar as três quantias de uma só vez, no fim de que prazo deverá êle fazer o pagamento?

Solução. Multiplicando-se as diversas quantias pelo tempo, e somando-se depois os produtos, obtém-se Cr$ 10800,00; ora, esta soma é igual às quantias que o lavrador deve, multiplicadas pelo tempo de prazo. Dividindo-se agora Cr$ 10800,00 por Cr$ 1800,00, que é a soma dos débitos, tem-se o prazo médio em que êle tem de fazer os três pagamentos de uma só vez. O prazo médio é 6 meses.

Débitos	meses	Produtos
Cr$ 400,00	× 9 =	3600,00
Cr$ 800,00	× 6 =	4800,00
Cr$ 600,00	× 4 =	2400,00
Cr$ 1800,00		10800,00

10800,00 ÷ 1800,00 = 6

Regra. *Para se achar o prazo médio, multiplica-se cada quantia pelo prazo respectivo, e a soma dos produtos divide-se pela soma dos débitos, e o quociente será o prazo médio.*

Nota. A quantia que tiver de ser paga à vista entra na soma **dos** débitos, mas não entra na soma dos produtos. (Vêde o 3.° problema).

1. Antônio deve a Bento Cr$ 200,00, que se vencem no fim de três meses, e Cr$ 400,00 que se vencem no fim de seis meses; em que tempo poderá êle pagar ambos os débitos sem prejuízo de parte a parte? Resp. 5 meses.

2. Devo a um comissário Cr$ 800,00 que se vencem no fim de 5 meses, e mais Cr$ 400,00 que se vencem em 8 meses. Achar o prazo médio do pagamento. Resp. 6 meses.

3. Comprei uma casa por Cr$ 3000,00 e concordei em pagar metade do preço à vista, um terço a seis meses de prazo, e o resto a 12 meses; em que prazo deverei eu, de uma só vez, pagar o preço inteiro da casa? Resp. 4 meses.

MISTURA

302. A mistura de mercadorias da mesma espécie, mas de diferentes valores, é muito frequente no comércio.

Nas casas de comissões mistura-se o café de vários preços, para fazer café de um só preço; mistura-se muitas vezes chá superior com chá inferior para obter um chá regular, e o mesmo se faz com o vinho, aguardente, gêneros alimentícios e outros artigos do comércio.

Quando há uma mistura de artigos de vários preços, é necessário saber achar a que preço fica a mistura; a regra, pois, que ensina êsse processo chama-se **regra de mistura.**

E' necessário não confundir mistura com liga.

Preço médio

303. Conhecidas as quantidades e os preços dos artigos misturados podemos determinar o preço de unidade da mistura. E' o **preço médio.**

Problema. Um negociante tinha 5 kg. de chá do preço de Cr$ 4,20 cada kg.; tinha também 4 kg. de Cr$ 4,80, e 6 kg. de Cr$ 4.00; misturando todo este chá, a como lhe ficou cada kg. da mistura ?

Solução. O importe do chá misturado é Cr$ 64,20, e o número de quilos misturado é 15. Dividindo, pois, o importe do chá pelo número de quilos misturados, que é 15, teremos Cr$ 4,28, preço de cada quilo da mistura do chá.

5 kg. a 4,20	21,00
4 kg. a 4,80	19,20
6 kg. a 4,00	24,00
15 kg.	64,20

Regra. *Para se achar o preço médio de uma mistura, divide-se o importe da mistura pelo número das unidades misturadas.*

1. Um negociante misturou 50 garrafas de vinho de custo de Cr$ 4,00 a garrafa, com 30 garrafas de vinho de custo de Cr$ 2,40; a como lhe ficou cada garrafa do vinho misturado ? Resp. Cr$ 3,40.

2. Um negociante comprou 20 litros de água de Colônia por Cr$ 70,00, mas, sendo ela muito forte juntou-lhe 5 litros de alcool para a enfraquecer; a que preço ficou cada litro da mistura si o litro de alcool custa Cr$ 1,00 Resp. Cr$ 3,00.

Auxílio para a solução:

20 litros de água de Colônia	70,00
5 litros de Alcool	5,00
25 litros de mistura por	75,00

3. Um negociante comprou 12 kg. de batatas a Cr$ 1,00 o kg. e como estas batatas fossem muito miúdas e tivessem por isso difícil venda, misturou-as a 8 kg. de batatas grandes que êle comprou a Cr$ 2,00. Requer-se o preço de cada kg. da mistura.
Resp. Cr$ 1,40.

Mistura calcuiada

304. A mistura calculada tem por fim determinar que quantidade se deve tomar de cada uma das substâncias, para que a mistura fique a um preço dado.

Chama-se mistura calculada, porque ela só é efetuada depois de um cálculo.

Problema. Quero misturar vinho de Cr$ 6,00 o litro com vinho de Cr$ 9,00 o litro, de sorte que o preço de cada litro da mistura fique a Cr$ 7,00. Quantos litros deverei misturar de cada preço ?

Solução. Neste problema é necessário notar que se perde no vinho cujo preço é superior ao preço dado, que é 7,00 e que se ganha naquele que é inferior; a operação consiste em igualar o ganho e a perda.

Entre 7 e 6 há uma diferença de 1; êste será o número de litros do vinho de Cr$ 9,00.

Entre 7 e 9 há uma diferença ou perda de 2, êste será o número de litros do de Cr$ 6,00.

7,00	6,00	1 litro de Cr$ 9,00
	9,00	2 litros de Cr$ 6,00

Podemos facilmente verificar a exatidão dêste cálculo pelo modo seguinte:

2 litros de vinho	a Cr$ 6,00	....	Cr$ 12,00
1 litro de vinho	a Cr$ 9,00	....	Cr$ 9,00
3 litros de mistura	a Cr$ 7,00	....	Cr$ 21,00

Quando se quiser fazer uma mistura maior do que a calculada multiplicam-se as quantidades indicadas por um mesmo número, e isto não alterará a proporção. No problema acima, a resposta é 2 litros de um vinho e 1 litro do outro.

Multiplicando estas duas quantidades por 10, temos 20 litros de um e 10 do outro; multiplicando por 100, temos 200 litros de um, e 100 litros do outro; e em todas estas proporções, o preço do litro da mistura será sempre Cr$ 7,00.

Os problemas da mistura calculada são, pois, suscetíveis de muitas respostas.

1. Um negociante de molhados tinha duas qualidades de vinho, uma que vendia a Cr$ 8,00 a garrafa, e a outra que vendia a Cr$ 13,00; que quantidade tinha de misturar de cada um, para que a garrafa de vinho misturado ficasse a Cr$ 10,00 ?
Resp. 3 garrafas de Cr$ 8,00.
" 2 " " Cr$ 13,00.

Mistura de artigos de quatro preços

305. Um negociante tinha chá de 4 preços a saber: de Cr$ 3,00, de Cr$ 8,00, de Cr$ 11,00 e Cr$12,00 o quilograma e quis fazer uma mistura de todos, de sorte que cada quilograma de mistura ficasse ao preço de Cr$ 9,00; que quantidade tinha de tomar de cada preço ?

9,00	3,00	3 kg. de 3,00
	8,00	2 " " 8,00
	11,00	1 " " 11,00
	12,00	6 " " 12,00

Solução. Os preços das diversas qualidades de chá escrevem-se em co-
luna com o preço dado ao lado esquerdo. Arranjam-se os preços aos pares,
havendo em cada par um preço menor e outro maior do que o preço dado.

Neste problema, o preço dado é Cr$ 9,00. Um par dos preços é com-
posto de Cr$ 3,00 e Cr$ 12,00 ligados pela linha de fora; o outro par é
composto de Cr$ 8,00 e Cr$ 11,00 ligados pela linha de dentro; 3,00 é o
oposto a 12,00, e 12,00 é o oposto a 3,00; do mesmo modo, 8,00 é o oposto
a 11,00, e 11,00 é o oposto a 8,00.

A razão por que se dispõem os preços aos pares, ficando em cada par
um preço maior e outro menor do que o preço médio estipulado, é para que
a perda seja contrabalançada pelo lucro.

Para se resolver êste problema, acha-se a diferença entre o preço dado
e os preços das qualidades que se quer misturar.

A diferença entre 9 e 3 é 6, que será a quantidade do preço oposto
a 3,00. O preço oposto a 3,00 é 12,00.

A diferença entre 9 e 8 é 1, que será a quantidade do preço oposto
a 8,00. O preço oposto a 8,00 é 11,00.

A diferença entre 9 e 11 é 2, que será a quantidade do preço oposto
a 11,00. O preço oposto é 8,00.

A dierença entre 9 e 12 é 3, que será a quantidade do preço oposto
a 12,00. O oposto é 3,00.

A mistura é composta de 3 kg. de um, e 2 de outro, 1 de outro e 6 de
outro; e para quantidades mais altas multiplicam-se todas por um fator
comum.

9,00	3,00	2
	8,00	3
	11,00	6
	12,00	1

Também se podem formar os pares dêste mo-
do: 3,00 com 11,00, e 8,00 com 12,00; nestes pares
as quantidades variam, mas o preço da mistura é
sempre o mesmo.

Regra. *Para se achar as quantidades de uma mistura que
fique a um preço dado, escrevem-se os preços das mercadorias
em coluna, e à esquerda dêles, o preço dado. Tomam-se aos
pares os preços das mercadorias, havendo em cada par um preço
maior e outro menor do que o preço dado.*

*Acha-se a diferença entre o preço dado e o de qualquer mer-
cadoria, e esta diferença será a quantidade do preço oposto.*

1. Tenho 4 qualidades de ameixa: de Cr$ 2,50 o quilo, de Cr$ 3,00, de Cr$ 4,80 e de Cr$ 5,00. Quanto vou misturar de cada uma para que o quilo da mistura fique a Cr$ 4,20 ?

Resp. 8kg. de Cr$ 2,50; 6 de Cr $3,00; 12 de Cr$ 4,80 e 17 de Cr$ 5,00.

2. Comprei 3 partidas de azeite fino, uma a Cr$ 1,60 o litro, outra a Cr$ 2,10, e outra a Cr$ 2,20; fiz uma mistura destas três partidas, que me ficou a Cr$ 2,00 o litro; quantos litros misturei de cada partida ?

	2,20	.... 0,40 ou 4
2000	2,10	.... 0,40 » 4
	1,60	0,20 + 0,10 = 0,03 » 3

Solução. Como há só três preços para a mistura, consideram-se os dois preços maiores em oposição ao menor. As diferenças de 2,20 e 2,10 para 2,00 somam 0,20 + 0,10 = 0,30, que é o número de litros do preço de Cr$ 1,60; a diferença entre 2,00 e 1,60 é 0,40, número de litros para os preços de 2,20 e 2,10. Como os números 0,40 e 0,30 se podem multiplicar por 10, o número de litros da mistura é 4 de Cr$ 2,20, 4 de Cr$ 2,10, e 3 de Cr$ 1,60.

3. Um refinador comprou 3 qualidades de açucar; uma a Cr$ 20,00 a arroba, outra a Cr$ 16,00 e outra a Cr$18,00; em que proporção devia êle misturar êste açucar para que cada arroba da mistura ficasse a Cr$ 19,00 ?

Resp. 9 arrobas de Cr$ 16,00, 6 de Cr$ 20,00 e 6 de Cr$ 18,00.

Achar a quantidade de cada mercadoria para a mistura quando é dado o total da mistura

306. Problema. Tenho quatro qualidades de cêra inglesa: uma de Cr$ 2,50 a libra, outra de Cr$ 3,50, outra de Cr$ 5,00, e outra de Cr$ 7,00. Quero fazer uma mistura de 180 libras, de sorte que o preço de cada libra da mistura fique a Cr$ 4,50; que quantidade devo misturar de cada preço ?

	2,50	2,50 ou 25 × 3 =	75
	3,50	0,50 » 5 × 3 =	15
4,50	5,00	1,00 » 10 × 3 =	30
	7,00	2,00 » 20 × 3 =	60
		60	180

Solução. Depois de se achar as partes proporcionais de cada preço, segundo a regra precedente, acha-se a razão da quantidade total para a soma das partes proporcionais. Ora a soma total da mistura é 180 libras, e a soma das partes proporcionais é 60 libras. A razão de 180 para 60 é 180 ÷ 60 = 3.

Multiplicando cada parte proporcional por 3, obteremos o número de libras que se deve tomar de cada preço, para fazer a mistura de 180 libras.

Regra. *Para se achar as partes proporcionais para uma mistura cujo total é dado, multiplica-se cada parte proporcional pela razão que há entre a quantidade total e a soma das partes proporcionais.*

1. Tenho duas qualidades de melado: uma do custo de Cr$ 2,40 o litro e a outra de Cr$ 3,60; quero encher um barril que leva 60 litros; quanto tenho de misturar de cada um para que o preço de cada litro fique a Cr$ 3,20?

Resp. 20 litros de Cr$ 2,40 e 40 de Cr$3,60.

2. Tenho uma quantidade de farinha de Cr$ 1,00 o quilo, e outra de Cr$ 1,50; quanto devo tomar de cada uma, para fazer uma partida de 60 quilos, que importe em Cr$ 72,00?

Resp. 36 litros de Cr$ 1,00, e 24 de Cr$ 1,50.

LIGA

307. Chama-se **liga** a combinação de um metal com outro por meio da fusão.

O fim da liga é dar aos metais certas propriedades que êles não teem no estado natural; assim o cobre ligado ao estanho fica mais sonoro; o ouro ligado ao cobre fica mais duro e mais próprio para ser convertido em moedas, jóias, etc.

Nota. Os problemas de liga são da mesma natureza que os de mistura, e resolvem-se pelas mesmas regras; damo-los, porém, em um capítulo separado, porque é necessário adiantar alguns esclarecimentos sôbre êste ponto.

308. O ouro é de todos os metais o mais maleável, e por causa da sua excessiva moleza, é indispensavel juntar-lhe certa quantidade de cobre para o tornar mais duro e consistente. Se os objetos fossem fabricados de ouro puro, amolgar-se-iam com a maior facilidade e perderiam a sua forma e o seu labor em pouco tempo de uso. Para evitar êsse inconveniente, junta-se ao ouro uma pequena quantidade de cobre ou de prata, e os objetos fabricados com esta liga ficam mais fortes e consistentes.

A maior ou menor pureza, do ouro era avaliado em **quilates.** Chama-se ouro de 24 quilates ao ouro puro. Ouro de 22 quilates é o que contém 22 partes de ouro puro, e 2 partes de cobre. Ouro de 18 quilates é o que contém 18 partes de ouro e 6 partes de cobre. Enfim ouro de 12 quilates, que é o mais baixo, é o que contém 12 partes de ouro e 12 partes de cobre. O número de quilates dá o **toque** do ouro.

Nota. Os ourives conhecem o toque do ouro pelo processo seguinte: Esfregam um pouco o ouro sôbre uma pedra, chamada pedra de toque, e sôbre o dourado, que fica na pedra, passam água forte, e, como a água forte dissolve todos os metais, excetuando o ouro, acontece que o cobre, que está ligado com o ouro, é dissolvido, ficando só o ouro inalterável. Os ourives calculam a quantidade de cobre que tem a liga, pela quantidade do dourado desaparecido da pedra. Se a água forte faz desaparecer muito dourado, o

ouro tem muito cobre, mas se faz desaparecer pouco dourado, o ouro tem pouco cobre.

309. A pureza da prata era avaliada em dinheiros, sendo 12 o máximo da avaliação; assim; prata de 12 dinheiros é prata pura; prata de 10 dinheiros é a que tem 10 partes de prata pura e 2 partes de cobre; de 8 dinheiros é a que tem 4 partes de cobre, etc.

A avaliação do ouro em quilates e da prata em **dinheiros** ainda é usada nas ourivesarias.

310. No sistema métrico decimal o toque é avaliado em **milésimos** e chama-se **titulo.** Quando em mil partes de liga há 900 partes de ouro puro, diz-se que o ouro é de 900 milésimos; em mil partes de liga de prata havendo 825 de prata pura, diz-se que a prata é de 825 milésimos.

Enfim, no toque o ouro puro é avaliado em 24 avos da liga e são tantos *quilates* quantos 24 avos; ao passo que no título o ouro puro é dado em *milésimos* da liga.

Determinar o toque e o título

311. Problema. *Fundiram-se 150 gramas de ouro puro e 30 gramas de cobre. Qual é o toque da liga resultante?*

Solução. Si são 150 gramas de ouro puro e 30 de cobre, o pêso total da liga é 180 gramas. O pêso do ouro puro contido na liga é, por conseguinte, $\frac{5}{8}$ do pêso total. Temos que verificar a quantos 24 avos equivale esta fração para obter o número de quilates. Chamando q êsse número, devemos ter $\frac{150}{180} = \frac{q}{24}$, donde se tira $q = 20$. O ouro é de 20 quilates.

$$150 + 30 = 180$$

$$\frac{150}{180} = \frac{q}{24}$$

$$q = \frac{150 \times 24}{180} = 20$$

312. Problema II. *Uma barra de ouro resultou da fundição de 180 gramas de ouro puro com 70 gramas de cobre. De que título é o ouro da barra?*

Solução. O pêso total da liga é $180 + 70 = 250$ gramas. O pêso do ouro puro corresponde, pois, a $\frac{180}{250}$ do pêso total. Basta verificar, agora, a quantos milésimos equivale esta fração, isto é, dar-lhe a forma decimal aproximando até milésimos. Vem $\frac{180}{250} = \frac{720}{1000}$.

O ouro da barra é, portanto, de 720 milésimos.

313. Problema III. *O toque de uma liga de ouro é 22 quilates. Qual é o título?*

Solução. Si o toque da liga é 22 quilates, isto quer dizer que $\frac{22}{24}$ são de ouro puro. Para achar o título da liga basta converter $\frac{22}{24}$ em decimal aproximando até milésimos. Acha-se: $\frac{22}{24} = 0,916$

O toque de 22 quilates corresponde, pois, ao título de 916 milésimos.

Nota. Raciocinando semelhantemente e observando que a prata pura tem 12 dinheiros, podemos resolver os três tipos de problema acima relativamente à prata.

1. Fundem-se 45 gramas de prata pura com 15 gramas de cobre. Quantos dinheiros tem a liga resultante?

Resp. 9 dinheiros.

2. Um ourives fundiu 63 gramas de prata pura com 9 gramas de cobre. Qual é o título da prata obtida?

3. Qual é o título (em milésimos) da prata de 9 dinheiros?

Resp. 750 milésimos.

Achar o peso do ouro puro

314. Vejamos como se pode, dados o peso total e o título da liga, achar o pêso de ouro puro.

Problema. *Uma barra de ouro ao título de 915 milésimos pesa* 220 *gramas. Quantas gramas de ouro puro há na barra?*

Solução. Si o título é 915, isto significa que 0,915 do pêso total da liga é de ouro puro; logo, para calcular o pêso dêste ouro puro, basta multiplicar 220 gramas por 0,915, o que dá 201,3 gramas de ouro puro.

Regra. *Para achar o ouro puro contido numa liga, multiplica-se o peso total da liga pelo título e divide-se o produto por mil.*

Título médio

315. Chama-se *título médio* o título da liga resultante da fundição de várias outras ligas.

Problema. *Um ourives, para fazer uma chapa, fundiu conjuntamente 3 objetos de ouro: um bracelete pesando 42 gramas ao título de 750 milésimos; uma aliança pesando 10 gramas ao título de 900 milésimos; e uma caixa de relógio pesando 25 gramas ao título de 820 milésimos. Qual é o título do ouro da chapa?*

Solução. Para saber-se o título da chapa precisa-se conhecer o pêso dela (peso total) e bem assim o do ouro puro que ela contêm. Ora, o pêso total da chapa acha-se somando os pêsos dos objetos fundidos. Encontra-se $42 + 10 + 25 = 77$ gramas.

Vejamos agora o pêso do ouro puro que ela contêm:

Ouro puro do bracelete	$\frac{42 \times 750}{1000}$	= 31,5 g
Ouro puro da aliança	$\frac{10 \times 900}{1000}$	= 9
Ouro puro do relógio	$\frac{25 \times 820}{1000}$	= 20,5
Ouro puro contido na chapa		61,0 g

O problema agora reduz-se a calcular o título de uma liga em que o pêso total é 77 gramas e que contém 61 gramas de ouro puro. Encontra-se: $\frac{61}{77} = 0{,}792$

O título do ouro da chapa é 792 milésimos.

Problema II. *Um ourives fundiu 60 gramas de ouro de 20 quilates, 48 gramas de ouro de 16 quilates e 36 gramas de ouro de 22 quilates. Quantos quilates tem a liga resultante?*

Solução. O problema se resolve como o anterior.

60g de ouro de 20q contêm	50g de ouro puro
48g de ouro de 16q contêm	32g de ouro puro
36g de ouro de 22q contêm	33g de ouro puro
144g (pêso total)	115g (ouro puro)

A nova liga pesa 144 gramas e contêm 115 de ouro puro. O toque é, portanto, (Vêja n.° 311) $19 \frac{1}{6}$ quilates.

Liga calculada

316. Problema. *Em que proporção se deve fundir ouro ao título de 880 milésimos com ouro de 930 milésimos para obter-se ouro de 900 milésimos?*

Solução. Este problema é análogo ao de mistura calculada. Vejamos. Em cada grama de ouro de 880 há 900 — 880 = 20 milésimos menos de ouro puro do que se deseja; por outro lado, em cada grama de ouro ao título de 930 há mais 30 milésimos (930 — 900) do que se deseja. Deve-se, pois, tomar 30 gramas de ouro de 880 para 20 gramas de ouro de 930. Com efeito, as diferenças assim se compensam:

Perda em 30g de ouro de 880 30x20 = 60
Ganho em 20g de ouro de 930 20x30 = 60

Dividindo estas duas quantidades por 10, encontra-se 2g. de ouro de 930 para 3g de ouro de 880. Conclusão: Em todas as ligas em que os dois ouros entrem nesta proporção, obter-se-á ouro ao título de 900 milésimos.

Nota. Si a pureza do ouro fosse avaliada em quilates, bastaria estabelecer a relação entre os quilates como foi feito no problema precedente para os milésimos.

1. Com ouro de 16 quilates e ouro de 22 quilates quer-se obter ouro de 20 quilates. Em que proporção se devem ligar os dois ouros?

317. Problema II. *Um ourives dispõe de ouro de 940 e ouro de 880 milésimos; quantas gramas de cada um deve fundir para obter 500 gramas de ouro ao título de 916 milésimos?*

Solução. De acordo com o problema anterior, a proporção em que se deve ligar os dois ouros é:

36 partes de ouro de 940 milésimos
24 partes de ouro de 880 milésimos

ou, simplificando, 3 partes de ouro de 940 para 2 partes de ouro de 880. Basta, então, dividir 500 gramas em partes proporcionais a 3 e 2. Vem:

$\frac{500 \times 3}{5} =$ 300 gramas de ouro de 940

$\frac{500 \times 2}{5} =$ 200 gramas de ouro de 880

CÂMBIO

318. Câmbio, em sentido lato, quer dizer o modo de fazer pagamentos em cidades ou lugares distantes, por meio de letras ou de ordens; câmbio, em sentido restrito, significa a troca da moeda de uma nação pela de outra nação, quer a moeda seja ouro, quer prata, quer papel.

Nas cidades grandes, e especialmente nas capitais, há bancos e casas comerciais que sacam dinheiro sôbre outros países, isto é, dão ordem aos seus correspondentes ou bancos com que teem relações comerciais para pagarem qualquer quantia em moeda corrente, conforme um aviso prévio.

Ilustração. Se quisermos pagar uma conta em alguma cidade da Europa, não é necessário procurarmos dinheiro estrangeiro para fazer o pagamento; pois nisto haveria grande dificuldade, e maior haveria ainda em remeter a moeda estrangeira para o seu destino. O câmbio, pois, facilita a transação, e evita o risco e a despeza do transporte do dinheiro.

Se quisermos mandar algum dinheiro para Londres, iremos a qualquer banco ou casa comercial que saca sôbre aquela praça, a ali daremos em moeda brasileira a quantia que quisermos remeter, e o banco nos dará uma letra de câmbio de valor equivalente em moeda inglesa; esta letra, remetida para Londres, será alí paga pelo banco ou pessoa contra quem vai sacada. O mesmo se faz com outras praças estrangeiras.

319. Letra de Câmbio é uma ordem, escrita com as formalidades da lei, na qual o credor determina ao devedor o pagamento da quantia inscrita no documento em época certa.

A letra pode ser nominativa ou ao portador. A letra é **nominativa,** quando traz o nome da pessoa a quem tem de ser paga; neste caso a sua importancia só pode ser recebida pela pessoa indicada, ou por outra à sua ordem. A letra é ao **portador,** quando não tem de ser paga a uma pessoa determinada, mas a quem a apresentar.

Si a letra mencionar o pagamento à vista, deve ser paga no ato de ser apresentada; quando marca 3, 8 ou 15 dias de vista, é paga 3, 8 ou 15 dias depois de ser apresentada.

Fórmula de uma letra de câmbio

Cr$ 500,00

Rio de Janeiro, 8 de Maio de 1905.

A três dias de vista, pagará V. S. por esta única via de letra de câmbio, à ordem do Sr. **João de Carvalho Braga,** *a quantia de* **quinhentos cruzeiros,** *em moeda corrente do país.*

Magalhães Pinto & Castro.

Ao Sr. José Luiz Ferreira.
São Paulo

Nota. As letras de câmbio não teem rigorosamente os mesmos dizeres, variam em algumas frases e são em geral, escritas na língua da nação para onde se destinam.

O câmbio é interno ou externo.

Câmbio interno é o que se realiza entre praças da mesma nação, como Rio de Janeiro e S. Paulo.

Câmbio externo é o que se realiza entre praças de nações diferentes, como Rio de Janeiro e Londres.

Câmbio interno

320. O câmbio interno é feito com moeda igual, visto ser efetuado entre duas cidades da mesma nação; às vezes, paga-se uma porcentagem sôbre a quantia que se quer sacar.

Problema. Um negociante do Rio de Janeiro, querendo pagar na Baía a quantia de Cr$ 500,00, foi ao Banco do Brasil e alí lhe deram uma letra para a Caixa Filial da Baía cobrando comissão de 3 %; quanto pagou êle pela letra?

Solução. O valor da letra, requerida é Cr$ 500,00, a comissão paga de 3 % é Cr$ 15,00; então êle teve de pagar pela letra Cr$ 515,00.

Valor da letra....	Cr$ 500,00
3 % sôbre 500,00 .	15,00
Importe da letra..	515,00

Câmbio externo

321. O câmbio com as nações estrangeiras seria tão simples e fácil como o câmbio interno, se todas as nações tivessem a mesma moeda.

Mas as moedas diferem de um país para outro em denominação, título do ouro e peso. Assim, no Brasil por exemplo, a antiga moeda ouro de 10$000 pesava 8,965g de ouro ao título de 916 milésimos; ao passo que, em França, a moeda de 20 francos pesava 6,45g ao título de 900 milésimos. E' preciso, pois, em cada caso, reduzir a quantia a pagar da moeda de uma nação à moeda de outra. Ainda no caso do Brasil e da França, estabelecida a proporção entre o ouro puro contido numa moeda e na outra, chega-se à conclusão de que por um franco se devia dar aproximadamente 353 réis.

Infelizmente, porém, não basta conhecer a moeda adotada nos demais países para saber quanto se deve dar por ela em determinado momento. Há uma infinidade de circunstâncias que influem no câmbio, fazendo variar muito o preço das moedas.

322. Chama-se **taxa de câmbio** de uma praça sôbre outra a quantidade de unidades monetárias da primeira que se precisa dar por uma quantidade fixa, invariável, de unidades de moeda de segunda. Diz-se, por isso, que a primeira praça dá o **incerto** à segunda e que esta dá à primeira o **certo.**

323. Câmbio ao par. Quando na troca da moeda de uma nação pela moeda de outra, se dá em ouro exatamente o que a outra vale em ouro, diz-se que o câmbio entre os dois países está **ao par.** Assim, relativamente à França, o câmbio estava ao par sempre que se dava 353 réis por franco. Quando se tinha de dar mais de 353 réis, dizia-se que o nosso câmbio estava **abaixo do par** em relação à França e o da França **acima do par** em relação ao Brasil.

Câmbio com a Inglaterra

324. A unidade principal da moeda inglesa é a *Libra esterlina*, que se indica com o sinal £ escrito antes do número de libras; assim £ 45 lê-se 45 *libras*. A libra divide-se em 20 shillings, o shilling divide-se em 12 pence, e o penny divide-se em 4 farthings. A libra tem, por conseguinte, 20 × 12 = 240 pence.

Nota. O plural de penny é pence, que se pronuncia pênce. Na numeração diz-se um penny, dois pence, cinco pence, etc. A abreviatura do penny é a letra *d*, inicial do termo *denarius* que era usado antigamente. Os farthings escrevem-se como frações do penny, assim $1\frac{3}{4}$ d lê-se: *um penny e três quartos*; $2\frac{1}{4}$ d. lê-se: *dois pence e um quarto*.

Nas operações de câmbio com a Inglaterra sempre demos o certo — 1000 réis, hoje 1 cruzeiro, por uma quantidade incerta, variável, de pence.

O número de pence que Londres dava pelo nosso 1$000, indicava a altura do câmbio. Dizia-se que o câmbio estava, por exemplo, a 24, quando o nosso 1000 réis valia 24 pence; estava a $18\frac{1}{4}$, quando o 1000 réis valia 18 pence e um quarto do penny; se estava a 5, o 1000 réis valia 5 pence e assim por diante.

325. Câmbio ao par com a Inglaterra. Pela antiga lei monetária brasileira (Dec. 54 B de 13 de Dezembro de 1889) o câmbio sobre a Inglaterra estava ao par quando Londres nos dava aproximadamente 27 pence por 1.000 réis. Posteriormente (Dec. 5.108, de 18 de Dezembro de 1926) o par com a Inglaterra foi fixado em $5\frac{115}{128}$ pence por 1.000 réis.

Hoje a paridade do câmbio é dada pelo dollar americano, de modo que a moeda inglesa passou a ser cotada a tantos cruzeiros e centavos por libra esterlina. Diz-se assim, que a libra esterlina está cotada a 68,45 e isto significa que devemos pagar Cr$ 68,45 por uma libra esterlina.

Redução da moeda brasileira a moeda inglesa

326. Problema I. Reduzir a Cr$ 16350,00 a moeda inglesa, estando a libra a Cr$ 65,40.

Solução. Valendo Cr$ 65,40 tanto como 1 libra, Cr$ 16350,00 valerão tantas libras quantas vezes 65,40 se contiver em 16350,00, isto é, 16350,00 ÷ ÷ 65,40 = 250 £.

Problema II. Reduzir Cr$ 480,00 a moeda inglesa, ao câmbio de 3.

Solução. Valendo um cruzeiro 3 pence, 480 cruzeiros devem valer 480 × 3 = 1440 pence. Ora, tendo a libra esterlina 240 pence, dividem-se os 1440 pence por 240, e teremos como quociente £ 6. (Vêde n.° 228, segundo problema resolvido).

$$\begin{array}{r} 480 \\ 3 \\ \hline 1440 \end{array}$$

$$1440 \div 240 = £\ 6$$

1. Quanto valem em Londres Cr$ 500,00 ao câmbio de 5? Resp. £ 10-8-4.

2. Mandei para Londres Cr$ 1000,00, e como o câmbio está a 3, quanto tem de ser lá entregue em moeda inglesa? Resp. £ 12-10-0.

3. Remeti para Londres Cr$ 19300 a libra esterlina valendo Cr$ 60,00; quantas libras esterlinas enviei? Resp. £ 321-13-4.

4. Temos Cr$ 3720,00, e queremos saber quantas libras produz esta quantia ao câmbio de $4\frac{3}{4}$. Resp. £ 73-12-6

5. Quanto é Cr$ 240,00 em moeda inglesa ao câmbio de $14\frac{1}{2}$?

Solução. Como a taxa do câmbio é $14\frac{1}{2}$, reduziremos a fração a uma decimal, e então teremos 14,5. No produto tiraremos o último algarismo da direita e ficará 3480 pence que, reduzidos a libras, dão $14\frac{1}{2}$ libras ou £ 14 e 10 shillings.

$$\begin{array}{r} 240 \\ 14{,}5 \\ \hline 1200 \\ 960 \\ 240 \\ \hline 3480{,}0 \end{array}$$

$$3480 \div 240 \doteq 14\frac{1}{2}$$

Redução de moeda inglesa a moeda brasileira

327. Problema I. Quanto valem, em moeda nacional £ 12-8-4 estando a libra a Cr$ 75,00.

Solução. Reduzindo 8 shillings e 4 pence a fração da libra, achamos $\frac{110}{240}$ ou $\frac{5}{12}$ da libra. Basta, agora, multiplicar $12\frac{5}{12}$ por 75,00 para ter $\frac{3725}{4}$ do cruzeiro, ou, ainda, Cr$ 931,25.

Problema II. Quanto valem no Rio de Janeiro 20 libras, 11 shillings e 9 pence ao câmbio de 27 ?

Solução. £ 20-11-9 reduzidos a pence dão 4941 pence (n.º **227**). Ora, como 27 pence dão 1 cruzeiro, segue-se que dividindo os 491 pence por 27, temos o número de cruzeiros que é Cr$ 183,00.

$$\begin{array}{rl} \text{Pence } 4941 & \underline{|\ 27\ } \\ \underline{27} & \ 183 \\ 224 & \\ \underline{216} & \\ 81 & \\ \underline{81} & \\ 0 & \end{array}$$

1. Recebemos uma fatura da Inglaterra na importância de 480 £, 18 shillings e 6 pence; estando o câmbio a 6, queremos saber em quanto nos importou esta fatura, em moeda brasileira? Resp. Cr$ 19237,00.

2. Um negociante comprou em Bristol certos gêneros na importância de 40 libras, 12 shillings e 6 pence; ora, estando a libra a Cr$ 60,00, quanto tem êle de dar em moeda brasileira para perfazer aquela importância ? Resp. Cr$ 2437,50.

3. Quanto é, em nossa moeda 123 £, 14 s. e 7 d. ao câmbio de $3\frac{1}{4}$? Resp. Cr$ 9136,92.

4. Comprei em Londres certas drogas na importância de £ 937-10-0; a quanto monta esta quantia em nossa moeda, valendo a libra Cr$ 96,00 ?

Achar o valor de uma libra esterlina

328. Problema. Estando o câmbio a 4, qual é o valor de uma libra esterlina ?

Solução. A libra esterlina tem 240 pence, e a taxa do câmbio mostra quantos pence vale o nosso cruzeiro; dividindo, pois, 240 pela taxa, que é 4, temos o quociente 60, que são Cr$ 60,00. Como algumas vezes a divisão deixa resto, acrescentam-se duas cifras decimais aos 240 pence para achar a fração de um cruzeiro, e então o dividendo será 240,00.

$$\frac{240,00}{4} = 15,00$$

Regra. *Para se achar o valor de uma libra dada a taxa do câmbio, divide-se 240,00 pela taxa do câmbio.*

Nota. Aplicando esta regra para o par antigo (de27d.) acha-se para valor da libra 8$888 que era o valor da libra ao par. Posteriormente o câmbio ao par passou a 5 $\frac{115}{128}$ dinheiros; o valor da libra esterlina era aproximadamente 40$680. Hoje a paridade é dada pelo dollar americano.

1. Qual é o valor de uma libra ao câmbio de 24? Resp. Cr$ 10,00
2. Qual é o valor de uma libra ao câmbio de 5? " Cr$ 48,00

Câmbio sôbre a França

329. A unidade monetária na França é o **franco,** que se divide em 100 cêntimos. Assim, a quantia Frs. 35,20 lê-se: 35 *francos* e 20 *cêntimos;* Frs. 0,75 lê-se: *setenta e cinco cêntimos.* A quantia em moeda nacional por que corre um franco indica a altura ou a taxa do câmbio sôbre a França; assim, se o câmbio estiver a 0,50, isto quer dizer que cada franco custará 50 centavos da nossa moeda; se estiver a 0,60, cada franco custará 60 centavos, etc.

No câmbio com a França, a unidade para a transação é sempre um franco; o que varia é o seu preço em moeda nacional pois, como já dissemos, damos o incerto para a França.

Redução da moeda brasileira à moeda francesa e vice-versa

330. Problema. Reduzir Cr$ 81,00 a francos ao câmbio de 0,36.

Solução. Sendo o preço de cada franco Cr$ 0,36 divide-se 81,00 por 0,36, e temos o número de francos, que é 225.

$$81,00 \div 0,36 = 225$$

Problema. Quanto é, em nossa moeda 225 francos ao câmbio de 0,36 ?

Solução. Custando 1 franco Cr$ 0,36, 225 francos devem custar custar 0,36 × 225 = 81,00.

$$0,36 \times 225 = 81,00.$$

Regra. *Para se reduzir moeda brasileira a francos, divide-se a quantia em moeda brasileira pelo valor de um franco. Si a divisão não for exata prolonga-se até centésimos. Para se reduzirem francos a moeda brasileira, multiplica-se o valor de um franco pelo número de francos que se quer reduzir.*

1. Reduzir Cr$ 39,20 a francos ao câmbio de 0,40.
Resp. 98 francos.

2. Mandei para París Cr$ 1530,00; estando o câmbio a 0,38, quantos francos enviei ? Resp. Frs.4026,30.

3. Quanto vale em Paris Cr$ 1000,00 da nossa moeda, estando o câmbio a 0,40 ? Resp. Cr$ 2.500 francos.

4. Um negociante mandou vir da cidade de Lião uma partida de sêda que importou em Cr$ 2244,00; estando o câmbio a 0,45, quantos francos custaram ? Resp. Frs. 4986,66

5. Em quanto importam 360 francos ao câmbio de 0,35 ?
Resp. Cr$ 126,00

6. Um objeto custa em França 3427 francos; ora estando, o câmbio sôbre a França a 0,55, por quanto poderemos comprá-lo em moeda brasileira ? Resp. Cr$ 1884,85

Câmbio sôbre Portugal

331. Antigamente a moeda brasileira e a portuguesa tinham a mesma denominação, as mesmas divisões e as mesmas unidades, mas com diferença de valor, pois o mil réis português valia aproximadamente o dôbro do nosso. Daí as expressões *moeda forte* e *moeda fraca*, que hoje não teem mais significação. Hoje a unidade monetária portuguesa é o **escudo** dividido em centésimos e a nossa é o cruzeiro dividido em centavos.

No câmbio entre o Brasil e Portugal, Portugal dá o certo, que é o escudo, e o Brasil dá o incerto.

Quando se diz que o câmbio está a 0,70, isto significa que por cada escudo se tem de dar Cr$ 0,70 ou 70 centavos.

Problema. Remeti para Portugal Cr$ 504,00, estando o cudos, estando o câmbio a 0,60, quanto tenho de pagar em nossa moeda ?

Solução. Se vale o escudo Cr$ 0,60, 840 escudos quanto valerão? Basta multiplicar 840 pela taxa, que é 0,60; o resultado é Cr$ 504,00

$840 \times 0,60 = $ Cr$ 504,00

Problema. Remeti para Portugal Cr$ 512,40, estando o câmbio a 0,60; que quantia era em moeda portuguesa ?

Solução. Se 60 centavos valem 1 escudo, 50400 quanto valerão? Basta dividir 50400 por 60. Acha-se 840 escudos.

Regra. *Para se reduzir a moeda portuguesa a moeda brasileira, multiplica-se a moeda portuguesa pela taxa do câmbio.*

Para se reduzir a moeda brasileira a moeda portuguesa, divide-se a quantia pela taxa do câmbio em moeda brasileira.

1. Mandei vir do Porto um carregamento de vinho que importou em 8.600 escudos; estando o câmbio a 0,80, quanto tenho de pagar ? Resp. Cr$ 6880,00.

2. Quero saber quanto é Cr$ 1800,00 da nossa moeda reduzidos a moeda portuguesa ao câmbio de 0,45. Resp. 4000 escudos.

3. Um droguista mandou vir de Lisboa 500 quilos de mercúrio doce; ora, custando em Lisboa cada quilo de mercúrio 3 escudos, quanto teve êle de pagar na nossa moeda, estando o câmbio a 0,84 ? Resp. Cr$ 1260,00.

Câmbio sôbre os Estados-Unidos

332. A unidade monetária nos Estados Unidos é o **dollar** que se divide em 100 cents, que são centésimos. Nas transações cambiais os americanos nos dão o *certo* — 1 dollar — por uma quantidade variável de cruzeiros e centavos.

Quando se diz que o câmbio sôbre os Estados Unidos está a 12,80 por exemplo, isto significa que temos de pagar Cr$ 12,80 por cada dollar.

Antes do número que indica a quantidade de dollars usa-se um cifrão e se na quantia houver cents, estes ficarão separados dos dollars por um ponto decimal. Assim

$25.45 lê-se: *25 dollars e 45 cents.*
$126.80 lê-se: *126 dollars e 80 cents.*

Cos estes esclarecimentos o discípulo poderá ler facilmente as seguintes quantias em *dollars*:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)
$1.25	$19.50	$ 75.50	$ 806.40
$8.14	$30.00	$184.30	$1250.00
$2.75	$12.45	$111.10	$ 943.82
$0.65	$40.50	$ 43.95	$ 400.75
$0.86	$ 8.60	$100.00	$ 102.25

Redução da moeda brasileira a dollars e vice-versa

333. Problema. Reduzir Cr$ 4340,00 a dollars ao câmbio de 12,40.

Solução. Sendo o preço do dollar Cr$ 12,40, divide-se 4340,00 por 12,40, e o quociente, que é 350, dá o número de dollars.

4.340,00 ÷ 12,40 = 350

Problema. Reduzir 350 dollars a moeda brasileira ao câmbio de Cr$ 12,40.

Sooluçã. Custando 1 dollar Cr$ 12,40, 350 dollars devem custar Cr$ 12,40 × 350 = Cr$ 4340,00.

12,40 × 350 = 4.340,00

Regra. *Para se reduzir moeda brasileira a dollars, divide-se a moeda brasielira pelo valor de um dollar aproximando até centésimos; e para se reduzirem dollars a moeda brasileira, multiplica-se o valor de um dollar pelo número de dollars que se quer reduzir.*

1. Reduzir Cr$ 6528,00 a dollars ao câmbio de 12,80.
Resp. 510 dollars.

2. Reduzir $215.75 a moeda brasileira ao câmbio de 12,64.
Resp. Cr$ 2727,08.

3. Quanto é em moeda brasileira 3545 dollars ao câmbio de 13,20 ?
Resp. ?

Nota. Como o câmbio com as outras nações se calcula do mesmo modo que o câmbio com o franco ou dollar, são desnecessários aqui mais exemplos.

Se os alunos quiserem exercitar-se nas outras moedas estrangeiras, poderão acha-las na tabela seguinte:

334. Tabela de algumas moedas estrangeiras e sua divisão:

NAÇÃO	NOME DA MOEDA	DIVISÃO
Alemanha	Marco	100 pfennigs
Belgica	Franco	100 centimos
Dinamarca	Corôa	100 ores
Estados-Unidos	Dollar	100 cents.
França	Franco	100 centimos
Espanha	Pesêta	100 centavos
Holanda	Florim	100 centimos
Inglaterra	Libra esterlina	20 shil. ou 240 p.
Italia	Lira	100 centesimos
Japão	Yen	100 sens.
Portugal	Escudo	100 centavos
Rep. Argentina	Peso	100 centavos
Suíça	Franco	100 centimos
Uruguai	Peso	100 centavos

A cotação das moedas pode ser encontrada diariamente na Secção Comercial dos grandes jornais. Basta procurar a rubrica — Câmbio — dessa secção.

ANÁLISE ARITMÉTICA

335. Os problemas da Aritmética podem ser resolvidos por dois modos: pelas regras especiais, que é o que se chama **solução sintética**, e por análise também chamada **solução analítica.**

Um problema resolve-se pelas regras da Aritmética, quando se segue restritamente o processo que elas formulam, como temos feito até aqui, nos diversos cálculos que temos operado. Resolve-se por análise, quando se desprezam as regras, e se desenvolve um raciocínio adequado com os dados do problema, para se achar a solução requerida.

Como em uma solução analítica, os dados de um problema são quasi sempre decompostos em suas partes mais simples ou fracionárias, para depois se achar as quantidades requeridas, veio-lhe desta decomposição o nome de **análise aritmética.**

336. Para maior clareza, vamos resolver um problema pela regra, e depois por análise; os alunos poderão, assim, notar fàcilmente a diferença que há nos dois modos de operar.

Problema. Quanto é 25 por cento de 88?

Regra. *Para se achar a porcentagem, multiplica-se o principal pela taxa, e o produto divide-se por* 100. (N.° **271**).

Solução. O problema requer a porcentagem de 25 % de 88. Ora, 88 é o principal, e 25 é a taxa. Conforme a regra acima, temos de multiplicar 88 por 25, e o produto que é 2200, dividí-lo por 100, que dá 22. Portanto 25 % de 88 é 22.

```
   8 8
   2 5 %
 -------
  4 4 0
 1 7 6
 -------
 2 2,0 0
```

Passemos agora a resolver êste problema por análise.

Análise. *25 por cento quer dizer 25 em cada 100, isto é,* $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$. *Ora* $\frac{1}{4}$ *de 88 é* $88 \div 4 = 22$.

Nota. O estudo da solução analítica é muito importante e necessário, e não deve, de modo algum, ser dispensado no ensino, pois há problemas que não estão sujeitos a regra alguma da Aritmética e só por análise podem ser resolvidos. Além disso, se os discípulos esquecerem as regras, teem ainda o recurso da análise que sempre os ajudará a calcular.

Para o aluno poder resolver fàcilmente um problema por análise, são necessárias duas condições:

1.ª Saber operar com presteza as quatro operações fundamentais sôbre números inteiros e frações, de modo que não ache dificuldade em processo algum da operação.

2.ª Estar convenientemente exercitado nos diversos cálculos resolvidos por meio das regras respetivas.

Com êste preparo poderá tirar grande vantagem da análise, e resolver fàcilmente até os problemas mais difíceis.

Depois de cada análise, daremos alguns problemas semelhantes para o aluno se exercitar neste processo analítico, e poder adestrar o raciocínio para a solução das mais enredadas questões da Aritmética.

1ª Série dos problemas para a solução analítica

1. A soma de quatro números consecutivos é 106; quais são êsses números?

Análise. *O segundo número consecutivo tem uma unidade ou 1 mais do que o primeiro; o terceiro tem 2 mais do que o primeiro, e o quarto tem 3 mais do que o primeiro. A soma destes excedentes é 1 + 2 + 3 = 6. Subtraindo 6 de 106, o resto 100 será a soma de 4 números iguais. Dividindo 100 por 4, temos 25, que é o primeiro número, e os seguintes são 25 + 1 = 26, 26 + 1 = 27, 27 + 1 = 28. Prova: 25 + 26 + 27 + 28 = 106.*

2. A soma de três números consecutivos é 126. quais são êsses números? Resp. ?

3. A soma de quatro números consecutivos é 74; quais são êsses números? Resp. ?

4. A soma de cinco números consecutivos é 195; quais são êsses números? Resp. ?

2ª Série

5. Dividir o número 80 em três partes, de modo que a primeira seja o dôbro da segunda, e a segunda tenha três vezes a terceira.

Análise. *A terceira parte representa 1; a segunda, sendo 3 vezes esta representa 3, e a primeira, sendo o dobro da segunda, representa 3 + 3 = 6 A soma destas partes é, portanto, 6 + 3 + 1 = 10. Dividindo 80 por 10, temos 8, que é a terceira parte. A segunda parte será então 8 × 3 = 24; e a primeira parte, 8 × 6 = 48.*

Prova: 8 + 24 + 48 = 80.

6. Dividir 120 em duas partes, de modo que uma tenha 5 vezes a outra. Resp. ?

7. Dividir 91 em 3 partes, tendo a primeira 3 vezes a segunda, e a segunda 3 vezes a terceira. Resp. ?

8. Dividir o número 45 em duas partes, ficando uma o dôbro da outra. Resp. ?

3ª Série

9. Dividir o número 70 em três partes na proporção de 2, 3 e 5.

Análise. *Os números proporcionais somam 2 + 3 + 5 = 10. Dividindo 70 por 10, temos 7, que corresponde a 1. Então uma parte é 7 × 2 = = 14; a outra é 7 × 3 = 21, e a outra 7 × 5 = 35.*

Prova: 14 + 21 + 35 = 70.

10. Dividir o número 90 em 4 partes na proporção de 2, 3, 4 e 6. Resp. 12, 18, 24 e 36.

11. Dividir o número 100 em três partes na proporção de 5, 6 e 9. Resp. ?

12. Dividir Cr$ 150,00 em 5 partes na proporção de 1, 2, 3, 4 e 5. Resp. ?

4ª Série

13. Se um homem pode fazer $\frac{5}{9}$ de uma obra em 4 dias, em quanto tempo fará êle a obra inteira?

Análise. *Se êle faz $\frac{5}{9}$ de uma obra em 4 dias, fará $\frac{1}{9}$ da obra em $\frac{1}{5}$ de 4 dias, que é $\frac{1}{5} \times 4 = \frac{4}{5}$ de um dia; e a obra inteira, que são $\frac{9}{9}$, êle a fará em $\frac{4}{5} \times 9 = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$ dias.*

14. Se $\frac{4}{11}$ de um terreno produzem 40 quilos de tomates, quantos quilos podem produzir o terreno inteiro? Resp. 110 litros.

15. Se $\frac{4}{7}$ de uma peça de veludo custam Cr$ 50,00 quanto deve custar uma peça?

16. Se $\frac{3}{8}$ de uma caixa de batatas custam Cr$ 15,00; quanto deve custar uma caixa inteira? Resp. Cr$ 40,00.

5ª Série

17. Custando $\frac{2}{3}$ de um barril de vinho Cr$ 240,00, quanto deve custar $\frac{3}{4}$ do barril?

Análise. *Custando $\frac{2}{3}$ do barril Cr$ 240,00, $\frac{1}{3}$ deve custar Cr$ 120,00, e $\frac{3}{3}$ que é o barril inteiro, devem custar $120,00 \times 3 = 360,00$. Custando o barril 360,00, $\frac{1}{4}$ do barril deve custar $360,00 \div 4 = 90,00$, e $\frac{3}{4}$ devem custar 3 vezes 90,00, que são 270,00.*

18. Custando $\frac{1}{5}$ de um saco de feijão Cr$ 14,00, quanto devem custar $\frac{9}{10}$? Resp. Cr$63,00

19. Se $\frac{5}{6}$ de uma pipa conteem 400 litros de vinho, $\frac{7}{8}$ da mesma pipa quantos litros poderão conter? Resp. 420 litros.

20. Três oitavos de uma barra de ferro pesando 40 quilos, quanto devem pesar dois quintos da mesma barra? Resp. ?

6ª Série

21. Dividir o número 15 em duas partes de sorte que a menor seja igual a $\frac{2}{3}$ da maior.

Análise. *Se a parte menor é igual a $\frac{2}{3}$ da maior, então a maior deve se $\frac{3}{3}$ e estas duas partes somam $\frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{5}{3}$. Ora, se $\frac{5}{3}$ de um todo ou de um número são iguais a 15, segue-se que $\frac{1}{3}$ é igual a 3, e $\frac{2}{3}$ que são a parte menor, são iguais a 6, e $\frac{3}{3}$ que são a parte maior, são iguais a 9.*

22. Raul e Oscar tinham de pagar Cr$ 60,00; Oscar tinha de pagar $\frac{3}{7}$ do que pagasse Raul; quanto devia pagar cada um? Resp. R. Cr$ 42,00, O. Cr$ 18,00.

23. Dividir o número 56 em duas partes, de sorte que uma seja $\frac{3}{4}$ da outra. Resp. ?

24. Dividir o número 45 em três partes, de sorte que a segunda seja $\frac{1}{2}$, e a terceira $\frac{3}{4}$ da primeira.
Resp. $1^a = 20$, $2^a = 10$, $3^a = 15$.

7ª Série

25. Dividir o número 38 entre A e B, de sorte que $\frac{2}{3}$ da parte de A sejam iguais a $\frac{3}{5}$ da parte de B.

Análise. *Se $\frac{2}{3}$ da parte de A são iguais a $\frac{3}{5}$ da parte de B, então $\frac{1}{3}$ de A, que é a sua metade, é igual a um meio de $\frac{3}{5}$ de B, que é $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$. Sendo $\frac{1}{3}$ de A igual a $\frac{3}{10}$ de B, $\frac{3}{3}$ de A são iguais a $\frac{3}{10} \times 3 = \frac{9}{10}$ de B. Sendo a parte de A igual a $\frac{9}{10}$ da parte de B, então a parte de B são $\frac{10}{10}$, e ambas as partes são $\frac{9}{10} + \frac{10}{10} = \frac{19}{10}$. Se $\frac{19}{10}$ de um número são 38, $\frac{1}{10}$ são 2, $\frac{9}{10}$ são 18, e $\frac{10}{10}$ são 20.*

26. Em um campo pastavam 55 animais entre vacas e carneiros: $\frac{1}{2}$ do número das vacas era igual a $\frac{2}{7}$ do número dos carneiros; qual era o número das vacas e o número dos carneiros?
Resp. 20 vac. 35 car.

27. A soma de dois números é 60, e $\frac{1}{3}$ do número menor é igual a $\frac{2}{9}$ do maior; quais são os números? Resp. ?

28. Em um pomar há 65 arvores entre laranjeiras e pessegueiros; $\frac{2}{3}$ das laranjeiras são iguais a $\frac{4}{7}$ dos pessegueiros; quantas árvores havia de cada espécie? Resp. ?

8ª Série

29. Qual é o número que, se lhe juntarmos $\frac{2}{3}$ de si mesmo ficará 20?

Análise. *O número tem $\frac{3}{3}$; com $\frac{2}{3}$ que lhe juntamos, ficam $\frac{5}{3}$. Ora se $\frac{5}{3}$ de um número são iguais a 20, $\frac{1}{3}$ é igual a 4, e $\frac{3}{3}$ iguais a $4 \times 3 = 12$.*

Prova: 12 com $\frac{2}{3}$ de 12, que são 8, somam 20.

30. Se juntarmos a certo número $\frac{3}{4}$ de si mesmo, êle ficará 28; qual é o número? Resp. ?

31. Se à idade de Julieta juntarmos $\frac{2}{5}$ da idade, a soma será 21; quantos anos tem Julieta? Resp. 15.

32. Blidónio tinha em um cofre certa quantia, e pondo lá depois $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ do que já lá estava, completou Cr$ 57,00; que quantia estava no cofre ? Resp. ?

9ª Série

33. Uma peça de flanela, ao ser molhada, encolheu $\frac{2}{9}$ do seu comprimento, ficando então com 28 metros; que comprimento tinha a peça antes de ser molhada ?

Análise. *Se encolheu $\frac{2}{9}$ restam $\frac{7}{9}$ que são iguais a 28 metros, sendo $\frac{1}{9}$ igual a 4 metros. Então $\frac{9}{9}$ são iguais a $9 \times 4 = 36$ metros.*

34. Um pai tinha mais 40 anos que seu filho, e a idade do filho é $\frac{3}{11}$ da idade do pai; qual é a idade de cada um ? Resp. Pai 55 e filho 15.

35. Donato gastou $\frac{3}{5}$ do dinheiro que tinha; depois, contando o resto, achou Cr$ 30,00; quanto possuía? Resp. Cr$ 75,00.

36. Um criador vendeu $\frac{5}{8}$ dos seus carneiros, e ainda lhe restaram 90; quantos carneiros tinha êle ?

10ª Série

37. Um alfaiate pode fazer uma obra em 2 dias, e sua mulher pode fazê-la em 3 dias; trabalhando juntos, em quantos dias a poderão fazer?

Análise. *O alfaiate fazendo a obra em 2 dias, faz $\frac{1}{2}$ da obra por dia, e a mulher faz $\frac{1}{3}$ por dia. Trabalhando juntos fazem $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ por dia ou $\frac{1}{6}$ da obra em $\frac{1}{5}$ de um dia. Então a obra inteira, que são $\frac{6}{6}$ leva $6 \times \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ dias, isto é, $1\frac{1}{5}$ dia.*

38. *A* pode fazer uma obra em 20 dias; *B* pode fazê-la em 15 dias e *C* pode fazê-la em 12; em quantos dias poderão fazê-la os três juntos? Resp. 5 dias.

39. Chamei 4 trabalhadores para fazer uma roçada; um a podia fazer em 12 dias, outro em 15, outro em 18 e outro em 24; em quanto tempo a farão todos juntos? Resp. $4\frac{4}{89}$.

40. Um lavrador pode colher todo o seu milho em 5 dias; seu filho pode colhe-lo em 7 dias; trabalhando ambos, em quantos dias o poderão colher? Resp. $2\frac{11}{12}$ dias.

11ª Série

41. A e B podem forrar uma casa em 4 dias; B podendo forrá-la sòzinho em 12 dias, em quanto tempo A a poderá forrar?

Análise. *Se os dois forram a casa em 4 dias, em um dia forram $\frac{1}{4}$ da casa. Se B a póde forrar em 12 dias, em um dia forrará $\frac{1}{12}$. Então A forra por dia $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$, e fazendo $\frac{1}{6}$ do trabalho por dia, os $\frac{6}{6}$ fará em 6 dias.*

42. *A*, *B* e *C* podem colher todo o feijão de uma roça em 4 dias; *A* pode colhê-lo sozinho em 8 dias, e *B* em 12 dias; em quantos dias o poderá colher *C*? Resp. ?

43. Um marceneiro e seu filho podem fazer um armário em 6 dias; o filho pode fazê-lo sòzinho em 27 dias; em que tempo o fará o marceneiro? Resp. $7\frac{5}{7}$ dias.

44. Duas torneiras podem encher um tanque em 3 horas; a primeira enchendo-o em 5 horas, em quanto tempo o encherá a segunda? Resp. ?

12ª Série

45. Perguntando-se a um estudante que horas eram, êle respondeu: As horas que passam do meio dia, são $\frac{1}{3}$ das que faltam para a meia noite. Que horas eram?

Análise. *Do meio dia à meia noite ha 12 horas, e se as horas depois do meio dia são $\frac{1}{3}$ das que faltam para a meia noite, então as que faltam são $\frac{3}{3}$ o que dá $\frac{1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{4}{3}$. Se $\frac{4}{3}$ de um número são 12, $\frac{1}{3}$ é 3; portanto eram 3 horas da tarde.*

Prova: Se eram 3 horas, faltavam 9 para a meia noite; ora 3 é $\frac{1}{3}$ de 9.

46 As horas que passam do meio dia, são iguais à metade do tempo que falta para a meia noite; que horas são? Resp. 4 horas.

47. O tempo que já passou do meio dia, é $\frac{3}{5}$ do que falta para a meia noite; que horas são? Resp. ?

48. Sabendo-se que as horas que já passaram do meio dia, são $\frac{1}{5}$ das que passaram da meia noite, que horas são? Resp. 3 horas.

13ª Série

49. Um pescador fisgou um peixe, cuja cabeça tinha 4 polegadas; o rabo era tão grande como a cabeça e metade do tronco, e o tronco era tão grande como o rabo e a cabeça; qual era o comprimento do peixe?

Análise. *A cabeça tinha 4 polegadas; o rabo era igual ao comprimento da cabeça e metade do tronco, isto é as 4 polegadas mais metade do tronco, e o tronco era igual à cabeça (4 polegadas) mais o rabo (4 polegadas mais meio tronco). Então o tronco era igual a 8 polegadas, mais meio tronco; do que se conclue que meio tronco era igual a 8 polegadas e o tronco igual a 16. Ora, como a cabeça tinha 4 polegadas, segue-se que o rabo devia ter 4 + + 8 = 12; e o comprimento do peixe inteiro devia ser 16 + 4 + 12 = 32 polegadas.*

Neste problema, entende-se por tronco a parte entre a cabeça e o rabo.

50. Comprei um badejo cuja cabeça tinha 6 polegadas de comprimento; tinha o rabo tão comprido como a cabeça e a metade do tronco, e o tronco tão comprido como a cabeça e o rabo juntos; qual era o comprimento do badejo? Resp. ?

51. A cabeça de uma garoupa tinha 12 polegadas; o rabo era tão comprido como a cabeça e a metade do tronco, e o tronco era tão comprido como a cabeça e o rabo; qual era o seu comprimento? Resp. ?

52. Perguntando-se a uma normalista quantos problemas de Aritmética resolveu corretamente, respondeu: Três quartos do número são 3 mais do que $\frac{3}{5}$. Quantos problemas resolveu ?
Resp. 20.

14ª Série

53. Quanto é 5 por cento de 60 ?

Análise. *5 por cento quer dizer 5 em cada 100 ou* $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$. *Ora* $\frac{1}{20}$ *de 60 são* $60 \times \frac{1}{20} = \frac{60}{20} = 3$.

54. Quanto é 15 por cento de Cr$ 80,00 ? Resp. Cr$ 12,00.
55. Quanto é 25 por cento de Cr$ 120,00? " ?
56. Quanto é 24 por cento de Cr$ 750,00? " ?

15ª Série

57. Quais são os juros de Cr$ 200,00 em 3 anos a 5 % ?

Análise. *5 % em 3 anos é o mesmo que 15 % em 1 ano. Sendo 15 %* $= \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$, *então* $\frac{3}{20}$ *de 200,00 são* $\frac{3}{20} \times 200,00 = 30,00$.

58. Achar os juros de Cr$ 50,00 em 2 anos a 6 %. Resp. ?
59. Achar os juros de Cr$ 80,00 em 5 anos a 8 %. " ?
60. Achar os juros de Cr$ 250,00 em 6 anos a 4 %. " ?

16ª Série

61. Um negociante de gado comprou uma vaca por Cr$ 40,00; por quanto deve vender, para ganhar 5 % ?

Análise. *5 % são* $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ *; como* $\frac{1}{20}$ *de 400,00 são 20,00, segue-se que êle a deve vender por* $400,00 + 20,00 = 420,00$ *para ganhar 5 %.*

66. Um lavrador comprou uma junta de bois por Cr$ 600,00; por quanto a deve vender para ganhar 10 % ? Resp. ?
63. Um padeiro comprou uma barrica de farinha por Cr$ 70,00; por quanto a deve vender para ganhar 20 % Resp. ?
64. Se uma arroba de café custou Cr$ 44,00, por quanto se deve vender para ganhar 25 % ? Resp. ?

17ª Série

65. Um negociante comprou uma peça de morim a Cr$ 5,00 o metro, e vendeu-o a Cr$ 7,00; quantos por cento ganhou ?

Análise. *Comprando-o a 5,00, e vendendo-o a 7,00, ganhou 2,00, que são* $\frac{200}{500} = \frac{2}{5}$ *do custo. Ora* $\frac{2}{5}$ *de 100 são* $\frac{2}{5} \times 100 = 40$*; portanto ganhou 40 %.*

66. Um homem comprou um cavalo por Cr$ 1500,00 e vendeu-o por Cr$ 2400,00; quantos por cento ganhou? Resp. 60 %.

67. Um negociante comprou uma pipa de vinho por Cr$ 480,00, e vendeu-a por Cr$ 600,00; quantos por cento ganhou ? Resp. 25 %.

68. Comprei um relógio por Cr$ 250,00, e vendi-o por Cr$ 200,00; quantos por cento perdi ? Resp. 20 %.

18ª Série

69. Um viajante encontrou na estrada alguns mendigos que lhe pediram uma esmola; êle achou que se désse a cada um 30 centavos, restar-lhe-iam ainda Cr$ 1,20, e que se désse a cada um 50 centavos, faltar-lhe-iam 80 centavos; quantos pobres encontrou ?

Análise. *Desde que sobravam 120 centavos, dando 30 a cada mendigo, e faltavam 80 centavos, dando 50 a cada mendigo, segue-se que, dando 50 centavos a cada um, despendia 200 centavos mais do que se désse 30 centavos a cada um.*

Cada mendigo recebia 30 centavos, mas, se com mais 200 centavos, cada mendigo podia receber 50 centavos, isto é 20 centavos mais, segue-se que havia tantos mendigos, quantas vezes o número 200 contém 20, que são $200 \div 20 = 10$.

70. Uma senhora desejou comprar um certo número de metros de cambraia; se ela comprasse a Cr$ 10,00 o metro, restar-lhe-iam Cr$ 50,00, mas se a comprasse a Cr$ 15,00, não lhe restaria dinheiro algum; quantos metros desejava ela comprar ? Resp. 10 metros.

71. Um pai desejava dar alguns pêssegos a seus filhos; se êle desse 2 pêssegos a cada um, sobrariam 9 pêssegos, mas se êle desse 4, faltariam 3 pêssegos; quantos filhos tinha? Resp 6.

72. Um menino deu a cada companheiro da sua classe 3 nozes, e ainda lhe restaram 24; se êle tivesse dado 7 a cada um, teria dado todas; quantos companheiros tinha êle ? Resp. 6.

19ª Série

73. Um homem concordou pagar a um trabalhador Cr$ 4,00 cada dia que êle trabalhasse, e o trabalhador concordou em ser multado em Cr$ 2,00 por cada dia que vadiasse; no fim de 20 dias. o trabalhador recebeu Cr$ 50,00; quantos dias vadiou ?

Análise. *Se êle tivesse trabalhado 20 dias, teria recebido Cr$ 80,00 mas como recebeu só Cr$ 50,00 perdeu Cr$ 30,00.*

Cada dia que êle vadiava perdia Cr$ 6,00, sendo Cr$ 4,00 do seu jornal, e Cr$ 2,00 da multa; portanto êle vadiou tantos dias, quantas vezes Cr$ 6,00 estão contidos em Cr$ 30,00, que são 5 dias.

74. Donato foi contratado para um serviço por 30 dias, recebendo Cr$ 6,00 por cada dia que trabalhasse, e pagando Cr$ 4,00 por cada dia que vadiasse. No fim dos 30 dias, recebeu Cr$ 100,00; quantos dias vadiou ? Resp. 8 dias.

75. Um jardineiro foi trabalhar 40 dias em uma chácara, com o seguinte contrato: Receber Cr$ 2,00 e comida por cada dia que trabalhasse, e pagar Cr$ 1,00 pela comida, no dia em que vadiasse. No fim do tempo recebeu Cr$ 50,00; quantos dias trabalhou ?

20ª Série

76. Um depósito de água leva 360 litros, e tem duas torneiras; uma o enche em 15 horas, e a outra o esvazia em 20 horas; abrindo-se as duas torneiras, em quantas horas o depósito ficará cheio?

Análise. *Uma torneira enche o depósito em 15 horas, logo em 1 hora deita só 360 ÷ 15 = 24 litros de água no depósito. A outra torneira o esvazia em 20 horas, logo em 1 hora despeja só 360 ÷ 20 = 18 litros.*

Ora, deitando uma torneira 24 litros de água no depósito em cada hora, e a outra torneira retirando só 18, claro está que, em cada hora, só ficarão 6 litros dentro do depósito. Se 6 litros ficam no tanque por hora, 360 litros ficarão em 360 ÷ 6 = 60 horas.

77. Uma caixa leva 900 litros de água; uma torneira a enche em 9 horas, e outra a esvazia em 18 horas; em que tempo ela ficará cheia abrindo-se as duas torneiras? Resp. ?

78. Um tanque que leva 1600 litros de água, tem duas torneiras, uma o enche em 4 horas, e a outra em 5 horas, abrindo-se as duas torneiras, em quantas horas ficará cheio?

Resp. $2\frac{2}{9}$ horas.

21ª Série

79. Um negociante reuniu em uma pipa 50 litros de vinho de Cr$ 8,00 cada litro; 80 litros do preço de Cr$ 9,00, e 70 litros do preço de Cr$ 10,00. A como lhe ficou cada litro da mistura ?

Análise *O número de litros misturados é 50 + 80 = 200. O importe do vinho misturado é 400,00 + 720,00 + 700,00 = 1820,00. Dividindo agora Cr$ 1820,00 por 200 temos Cr$ 9,10, que é o preço de cada litro.*

80. Misturando-se 24 quilos de chá do preço de Cr$ 8,00 cada quilo, com 36 quilos do preço de Cr$ 9,00, por que preço ficará cada quilo da mistura ? Resp. Cr$ 8,60.

81. Ligando-se 160 gramas de ouro de 22 quilates com 72 gramas de ouro de 18 quilates, com quantos quilates fica o ouro desta liga ?

82. Misturando-se 60 arrobas de café do preço de Cr$ 35,00 a arroba, com 40 arrobas do preço de Cr$ 40,00, por que preço ficará cada arroba da mistura ? Resp. Cr$ 37,00.

22ª Série

83. Um filho tem 11 anos, e seu pai 35; continuando os dois a viver, quando a idade do pai será o dôbro da idade do filho?

Análise. *Se o pai tivesse sòmente 22 anos, teria já o dôbro da idade do filho, mas como tem mais 13 anos do que o dobro da idade do filho, visto que 35 — 22 = 13, segue-se que a sùa idade só poderá ser o dôbro da do filho, quando viverem mais 13 anos, porque então êle terá 35 + 13 = 48 anos, e seu filho terá a metade, isto é, 11 + 13 = 24.*

84. Odorina tem 9 anos, e sua mãe 27; quando a idade de Odorina será metade da idade de sua mãe? Resp. ?

85. Silvana tem 16 anos, e sua tia tem mais 30 do que ela, quando a idade de Silvana será a metade da de sua tia? Resp. ?

86. Um homem tem 40 anos, e seu filho tem um quinto da sua idade; quando a idade do pai será o dôbro da idade do filho? Resp. ?

23ª Série

87. Em um pomar, $\frac{1}{3}$ das árvores são laranjeiras, $\frac{1}{4}$ são pessegueiros, $\frac{1}{6}$ são mangueiras, $\frac{1}{8}$ são jaboticabeiras, e o resto são 20 romeiras; quantas árvores tem o pomar?

Análise. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. *ora a $\frac{7}{8}$ falta $\frac{1}{8}$ para um inteiro ou $\frac{8}{8}$. Este oitavo que falta são as 20 romeiras; portanto, se $\frac{1}{8}$ de um número é igual a 20, $\frac{8}{8}$ são iguais a $20 \times 8 = 160$.*

88. Em uma escola, $\frac{1}{16}$ dos discípulos estuda Gramática, [illegible] Geografia, $\frac{3}{16}$ Aritmética, $\frac{3}{20}$ Caligrafia, e 9 aprendem a ler; qual é o número dos alunos? Resp. 80.

89. A diferença entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ de um número é 3; qual é êsse número? Resp. ?

90. Um sujeito esqueceu-se do número da casa para onde ia, e só se lembrava que a diferença entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ dêsse número é 2; qual é o número? Resp. ?

24ª Série

Observação. Nesta série daremos sòmente um problema em cada análise; e por êle os alunos poderão depois resolver fàcilmente os problemas da mesma natureza.

91. O Barão de Caraguatatuba comprou um cavalo branco e outro tordilho, custando o branco mais Cr$ 120,00 do que o tordilho; qual é o preço de cada um, sabendo-se que 4 vezes o custo do tordilho, mais 2 vezes o custo do branco somam Cr$ 4440,00 ?

Análise. *Na soma de Cr$ 4440,00 entra duas vezes a diferença do preço do cavalo branco. Deduzindo-se de Cr$ 4440,00 duas vezes Cr$ 120,00, que são Cr$ 240,00, resta a quantia de Cr$ 4200,00. Como neste resto estão agora contidas 6 partes iguais, sendo 4 do cavalo tordilho, e 2 do branco, dividiremos Cr$ 4200,00 por 6, e teremos Cr$ 700,00, preço do cavalo tordilho, e Cr$ 700,00 + Cr$ 120,00 = Cr$ 820,00, preço do cavalo branco.*

92. Ao meio dia os dois ponteiros de um relógio estão juntos, em que momento exato estarão juntos outra vez?

Análise. *O ponteiro dos minutos corre 60 minutos enquanto o outro corre 5, ou corre 12 enquanto o outro corre 1. Portanto o ponteiro grande, em cada 12 minutos, vence 11 minutos na distância que o separa do ponteiro pequeno, a qual é de 60 minutos. Se para vencer 11 minutos tem de andar 12, para vencer um minuto tem de andar* $\frac{12}{11}$ *e para vencer os 60 minutos, tem de andar* $\frac{12}{11} \times 60$*, isto é, 65* $\frac{5}{11}$ *minutos ou 1 hora e 5* $\frac{5}{11}$ *minutos, momento exato, em que os dois ponteiros devem estar juntos.*

93. Tradução de um velho problema em versos latinos: "Ao lado de um macho, seguia um jumento carregando certo número de medidas de farinha, e, oprimido pelo pêso da carga, começou a lastimar-se com uma lamúria sem fim. O macho, para pôr um têrmo aos seus queixumes, disse-lhe: Porque estás aí a prantear, como uma criança choramigando a sua mãe? Fica sabendo que, se eu tomasse uma das medidas que vão sôbre o teu lombo, a minha carga seria então o dôbro da tua; e se tu tomasses uma medida das minhas, ainda as nossas cargas ficariam iguais. Dize-me agora, sábio matemático, quantas medidas levava cada um?

Análise. *O macho levava 7 medidas, e o jumento, 5, como vamos demonstrar. Tirando-se uma medida de farinha da carga do macho e pondo-a sôbre o jumento, as duas cargas ficavam iguais, logo o macho levava mais 2 medidas que o jumento. Tirando-se uma medida da carga do jumento e pondo-a sôbre o macho, êste ficava com 4 medidas mais do que o jumento, visto o jumento ter agora uma medida de menos. Ora, se o macho, com mais 4 medidas, teria o dôbro da carga do jumento, segue-se que o jumento teria 4 medidas, e o macho teria o dôbro, que são 8. Mas como não se efetuou esta mudança, o macho levava 7 medidas e o jumento 5.*

94. Um criador de gado tinha as suas ovelhas em três campos diversos; no segundo campo tinha 4 vezes o número das ovelhas que tinha no primeiro, e no terceiro tinha 3 vezes tantas como no segundo ou 70 mais do que no primeiro e no segundo. Quantas ovelhas havia em cada campo?

Análise *No primeiro campo havia uma só vez um certo número de ovelhas; no segundo havia 4 vezes, e no terceiro 12 vezes. Ora a diferença entre 12 vezes e 4 + 1 = 5 vezes é 7 vezes, e 7 vezes são iguais a 70; uma vez é então igual a 10. Logo no primeiro campo havia uma vez, que eram 10; no segundo 4 vezes que eram 40, e no terceiro havia 12 vezes, que eram 120.*

POTÊNCIAS

337. A palavra **potência** é empregada em Aritmética para designar o produto de dois ou mais fatores iguais.

Qualquer número é considerado como a sua primeira potência; assim a primeira potência de 5 é 5; a primeira potência de 6 é 6.

A **segunda potência** de um número é o produto dêsse número por si mesmo; assim a segunda potência de 5 é $5 \times 5 = 25$, de 6 é $6 \times 6 = 36$, de 7 é $7 \times 7 = 49$, etc.

A **terceira potência** de um número é o produto de três fatores iguais a esse número; assim a terceira potência de 5 é $5 \times 5 \times 5 = 125$. de 6 é $6 \times 6 \times 6 = 216$; de 7 é $7 \times 7 \times 7 = 343$, etc.

A **quarta potência** de um número é o produto de quatro fatores iguais a esse número; assim a quarta potência de 5 é $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$.

As outras potências se formam na mesma ordem crescente, conservando a sua respectiva relação com a raiz.

338. O número que se eleva a uma potência qualquer é a *base* da potência. Assim, todo produto de fatores iguais a 5 é uma potência de base 5; todo produto de fatores iguais a 6 é uma potência de base 6; etc. Para indicar quantos fatores iguais são considerados, escreve-se, à direita e um pouco acima da base, o número dêsses fatores. E' o *expoente* que exprime o *grau* da potência.

Expoente é o número que se escreve no alto direito de uma quantidade para exprimir o grau da potência. Assim

5^1	lê-se:	*1ª potência de 5;*	5^5	lê-se:	*5ª potência de 5;*
5^2	" :	*2ª potência de 5;*	5^6	"	*6ª potência de 5;*
5^3	"	*3ª potência de 5;*	5^7	"	*7ª potência de 5;*
5^4	"	*4ª potência de 5;*	5^0	"	*5 elevado à potência zero* .

339. Dá-se à segunda potência também o nome de **quadrado,** porque o processo para formar esta potência é o mesmo que para achar a área de um quadrado. Assim a expressão 6^2 lê-se: *quadrado de 6 ou segunda potência de 6.*

Dá-se à terceira potência também o nome de **cubo,** porque o processo para achar esta potência é o mesmo que para achar

o volume de um cubo. Assim 6^3 lê-se: *cubo de 6 ou terceira potência de 6.*

Nota. Em linguagem aritmética, os termos *quadrado* e *cubo* são em geral preferidos às expressões *segunda potência* e *terceira potência*, porque se correspondem melhor com os seus correlativos *raiz quadrada* e *raiz cúbica*.

As outras potências podem também ser lidas pela forma seguinte:

8^4 lê-se: *8 elevado à quarta potência.*
9^5 " *9 elevado à quinta potência;* etc.

340. Para se indicar o grau da potência de uma fração, escreve-se a fração entre parêntesis com o expoente do lado de fóra, ou dá-se um expoente a cada um dos seus termos; assim $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ ou $\frac{3^2}{4^2}$ lê-se: *o quadrado de três quartos.*

341. Os quadrados dos números simples são os seguintes:

Números:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Quadrados:	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.

Os quadrados de todos os outros números podem ser obtidos sem dificuldade alguma, como vamos demonstrar.

1º Problema. Qual é o quadrado de 25?

Solução. Multiplicando 25 por si, temos o produto 625, que é o quadrado de 25. $25 \times 25 = 625.$

Regra. *Para se achar o quadrado de um número, multiplica-se êsse número por si; o produto será o quadrado.*

2º Problema. Qual é o quadrado de $\frac{1}{2}$?

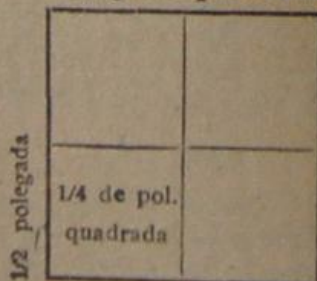
Solução. Multiplicando cada um dos termos da fração por si, temos $\frac{1}{4}$ que é o quadrado de $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$

Demonstração. Poderá parecer extranho que o quadrado de $\frac{1}{2}$ seja $\frac{1}{4}$ isto é, um número menor que $\frac{1}{2}$, mas é um fato. Se traçarmos uma figura que tenha uma polegada quadrada, e a dividirmos em quatro partes iguais, notaremos que a metade de cada lado é $\frac{1}{2}$ polegada, e o quadrado de $\frac{1}{2}$ polegada é $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ da polegada quadrada.

Polegada quadrada

Dos dois problemas acima resolvidos, concluímos o seguinte princípio:

As potências dos números inteiros são sempre maiores que as suas bases, mas as potências das frações próprias são sempre menores.

3º Problema. Qual é o quadrado de $2\frac{1}{2}$?

Solução. O número $2\frac{1}{2}$ reduzido a fração imprópria fica $\frac{5}{2}$ e o quadrado de $\frac{5}{2}$ é $\frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$. Podemos obter o mesmo resultado, reduzindo a fração ordinária a decimal, e depois operando a multiplicação, que dará o mesmo resultado, porque $6{,}25 = 6\frac{1}{4}$.

$$\frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$$

$$2{,}5 \times 2{,}5 = 6{,}25 = 6$$

Regra. *Para se achar o quadrado de uma fração, multiplica-se cada um dos seus termos por si.*

Se o número é misto, reduz-se a fração imprópria e procede-se como em uma fração.

Resolver os seguintes problemas:

1. Qual é o quadrado de 29?	Resp.	841.
2. Achar o quadrado de 48.	"	2304.
3. Achar o quadrado de 0,25.	"	0,0625.
4. Achar o quadrado de $\frac{7}{12}$	"	$\frac{49}{144}$.
5. Achar o quadrado de $5\frac{1}{3}$.	"	$28\frac{4}{9}$.
6. Somar 80^2 com 16^2.	"	6656.
7. Subtrair 11^2 de 12^2.	"	23.
8. Achar a diferença entre 17^2 e 16^2	"	33.
9. Achar o quadrado de 58.	"	?
10. Achar o quadrado de 86.	"	?
11. Achar o quadrado de $\frac{31}{60}$.	"	?
12. Achar o quadrado de $9\frac{1}{5}$.	"	?
13. Achar o quadrado de 0,15.	"	?
14. Achar a soma de 25^2 e 9^2.	"	?
15. Multiplicar 8^2 por 4^2.	"	?
16. Dividir 9^2 por 3^2.	"	?

Formar os quadrados de números consecutivos sem auxílio da multiplicação

342. A diferença entre os quadrados de dois números inteiros consecutivos é igual a duas vezes o número menor mais uma unidade. Assim 8 e 9 são dois números inteiros consecutivos; os seus quadrados são $8 \times 8 = 64$ e $9 \times 9 = 81$; a diferença entre estes quadrados é $81 - 64 = 17$. Ora 17 é igual a duas vezes 8, que é número menor, e mais uma unidade, pois, $8 + 8 + 1 = 17$.

Dêste modo podemos formar, sem dificuldade, uma série de quadrados seguidos, juntando sòmente a cada quadrado duas vezes a sua raiz e mais uma unidade. Assim

100 .... é o quadrado de 10;
100 + 10 + 10 + 1 = 121 que é o quadrado de 11;
121 + 11 + 11 + 1 = 144 que é o quadrado de 12;
144 + 12 + 12 + 1 = 169 que é o quadrado de 13;
169 + 13 + 13 + 1 = 196 que é o quadrado de 14;
196 + 14 + 14 + 1 = 225 que é o quadrado de 15; etc.

Por estes exemplos fica evidente que, quando um número aumenta uma unidade, o seu quadrado aumenta duas vezes êsse número e mais 1. Daqui podemos estabelecer o seguinte teorema: *Se juntarmos ao quadrado de um número duas vezes êsse número e mais 1, formaremos o quadrado do número consecutivo superior.*

Este princípio nos habilita a resolver fàcilmente, por meio de uma adição, muitos problemas. Vamos dar alguns exemplos:

1º Problema. O quadrado de 15 é 225; calcular o quadrado de 16 e 17, sem operar multiplicação alguma.

Solução. O quadrado de 15 sendo 225, então o quadrado de 16 é 225 + 15 + 15 + 1 = 256; e o quadrado de 17 é 256 + + 16 + 16 + 1 = 289.

```
225
 15
 15
  1
---
256
```

2º Problema. A diferença dos quadrados de dois números inteiros consecutivos é 29, quais são êsses números?

Solução. A diferença dos quadrados é 29. Ora, pelo teorema que acabamos de deduzir, essa diferença é igual a duas vezes o número menor mais 1. Então 29 — 1 = 28, e 28 ÷ 2 = 14, que é o número menor, logo o maior é 15, porque são consecutivos. Prova: $14^2 = 196$; $15^2 = 225$. A diferença dos seus quadrados é, pois, 225 — 196 = 29.

29 — 1 = 28
28 ÷ 2 = 14

3º Problema. Um jardineiro, quis fazer em um parque um quadrado de fileiras de eucaliptos. Se êle pusesse um certo número de cada lado faltavam-lhe 18 eucaliptos, mas se êle pusesse um de menos de cada lado sobravam-lhe 9; quantos eucaliptos tinha?

Solução. Para formar o quadrado maior, faltavam 18 eucaliptos, e formando o menor, sobravam 9; logo a diferença era 18 + 9 = 27. Então 27 — 1 = 26, e 26 ÷ 2 = 13, que é o número menor de cada lado do quadrado, sendo o maior 14.

Como $13^2 = 169$, o número de eucaliptos que tinha o jardineiro era 169 + 9 = 178, o que se pode verificar com o número maior, porque $14^2 = 196$, e 196 — 18 = 178.

27—1 = 26
26÷2 = 13
$13^2 = 169$
169+9 = 178

Os alunos resolverão os seguintes problemas:

1. Sabendo-se que o quadrado de 37 é 1369, como se poderá achar o quadrado de 38 e 39 sem se operar multiplicação alguma? Resp. ?

2. Achar o quadrado de 55 pelo quadrado de 54, que é 2916. Resp. ?

3. A diferença dos quadrados de dois números consecutivos é 35; quais são êsses números? Resp. ?

4. A diferença dos quadrados de dois números consecutivos é 197; quais são êsses números? Resp. ?

5. Um fazendeiro tinha um terreno quadrado, e quis transformá-lo em um pequeno cafezal. Plantando em cada lado certo número de cafeeiros em fileiras, faltavam-lhe 15 para completar o quadrado, e plantando um de menos em cada fileira, sobravam 34: quantos cafeeiros tinha? Resp. 610.

Formação das outras potências

343. As outras potências são formadas por meio da multiplicação continuada da sua base, como já foi exposto nas secções precedentes.

1º Problema. Qual é o cubo de 4?

Solução. Multiplicando o número 4 por si, temos 16 que é o seu quadrado; multiplicando depois o quadrado por 4, temos 64, que é o seu cubo. Logo $4^3 = 64$. Neste processo efetuaram-se duas multiplicações, nas quais o número 4 entrou três vezes como fator.

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 4 \\ \hline 16 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ 4 \\ \hline 64 \end{array}.$$

2º Problema. Qual é a quarta potência de 5?

Solução. Multiplicando o número 5 por si, temos 25, que é o seu quadrado; multiplicando o quadrado por 5, temos 125, que é o seu cubo; multiplicando finalmente o cubo 5, temos 625, que é a sua quarta potência. Logo $5^4 = 625$. Neste processo efetuaram-se três multiplicações, nas quais o número 5 entrou quatro vezes como fator.

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 5 \\ \hline 25 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25 \\ 5 \\ \hline 125 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 125 \\ 5 \\ \hline 625 \end{array}$$

Regra. *Para se achar qualquer potência de um número, toma-se êsse número como fator tantas vezes quantas forem as unidades do grau da potência, e acha-se o produto dessa multiplicação continuada.*

Nota. Qualquer potência de 1 é sempre 1; assim o quadrado de 1 é $1 \times 1 = 1$, o cubo de 1 é $1 \times 1 \times 1 = 1$, etc.

Achar as seguintes potências.

	Respostas		Respostas
1. Achar o cubo de 85.	614125	6. Elevar 12 á 5ª potencia	?
2. Achar 73^3.	389017	7. Achar 10^5.	?
3. Elevar 15 á 4ª potência.	50625	8. Achar o cubo de $\frac{4}{5}$.	?
4. Achar 8^5.	32768	9. Elevar $\frac{1}{2}$ á 6.ª potência.	?
5. Achar $(\frac{3}{4})^4$.	$\frac{81}{256}$	10. Achar 75^4.	?

Achar o produto de duas ou mais potências de mesma base, operando sòmente com os expoentes

344. Problema. Qual é o produto de 4^3 multiplicado por 4^2 operando só com os expoentes?

Solução. A potência $4^3 = 4 \times 4 \times 4$, e a potência $4^2 = 4 \times 4$; portanto o produto de $4^3 \times 4^2$ é igual a 4 tomado 5 vezes como fator. Ora 5 é a soma dos expoentes $3 + 2 = 5$; portanto o produto deve ter um expoente que seja a soma dos expoentes das potências multiplicadas.

$$4^3 \times 4^2 = 4^{3+2} = 4^5$$

Regra. *Para se achar o produto de duas ou mais potências de mesma base, adicionam-se os expoentes das potências multiplicadas, e a soma escreve-se como o expoente da mesma base; esta potência será o produto da multiplicação.*

Achar os produtos seguintes dando os resultados numa só potência.

1. $8^5 \times 8^3$.	Resp. 8^8	4. $2^5 \times 2^5 \times 2^{10}$.	Resp. ?
2. $7^5 \times 7^3 \times 7$.	" 7^9	5. $8^3 \times 8^2 \times 8$.	" ?
3. $15^4 \times 15^5 \times 15^2$.	" 15^{11}	6. $12^4 \times 12^3$.	" ?

Nota. Na formação das potências superiores ao cubo, podemos reduzir o número de multiplicações, operando também com as potências já formadas. Se quisermos, por exemplo, elevar o número 6 à quarta potência, em lugar de fazermos três multiplicações, poderemos multiplicar o quadrado de 6 por si, e obteremos logo a quarta potência, porque $6^4 = 6^2 \times 6^2 = 1296$, e dêste modo faremos só duas multiplicações. Se quisermos elevar o número 6 à quinta potência, poderemos multiplicar o cubo pelo quadrado, porque $6^5 = 6^3 \times 6^2 = 7776$. E' necessário, porém, notar que êste processo, se tem a vantagem de reduzir o número de multiplicações, tem também a inconveniência de estar mais sujeito ao êrro; porque, sendo ambos os fatores de cada multiplicação compostos de muitos algarismos, a operação se torna mais longa e sujeita a enganos.

Achar o valor da potência zero

345. Qual é o valor de 4^0, isto é, 4 elevado à potência zero?

Análise. Se dividirmos um número qualquer por si mesmo, o quociente será igual à unidade ou a 1. Assim $\frac{16}{16} = 1$; do mesmo modo, $\frac{4^2}{4^2} = 1$.

Já mostrámos que, para multiplicar uma potência por outra de mesma base, basta somar os expoentes, conservando a base; assim $4^3 \times 4^2 = 4^{3+2} = 4^5$. Logo, para dividir uma potência por outra do mesmo número, bastará subtrair um expoente do outro, por isso $4^2 \div 4^2 = 4^{2-2} = 4^0$. Ora, como, por outro lado, $\frac{4^2}{4^2} = 1$, segue-se que $4^0 = 1$, e por semelhante modo, $5^0 = 1$, $6^0 = 1$, etc. Daquí podemos estabelecer o seguinte princípio: *Qualquer número elevado à potencia zero é igual à unidade.*

Formação sintética de um quadrado

346. Um quadrado pode ser também considerado como um conjunto ou soma de parcelas diversas que conservam entre si certa relação, e que podem ser de novo desagregadas por meio de uma decomposição analítica do quadrado.

As diversas partes ou elementos que constituem um quadrado e a relação que ha entre êles estão claramente indicadas no seguinte teorema:

O quadrado da soma de dois números é igual à soma do quadrado do primeiro número, mais duas vezes o produto do primeiro multiplicado pelo segundo, e mais o quadrado do segundo.

Este teorema ficará perfeitamente claro com a seguinte ilustração:

Ilustração. Se tomarmos o número 15, e o decompusermos em duas parcelas quaisquer, como, por exemplo, $8 + 7$, e seguirmos depois o processo indicado pelo teorema acima exposto, teremos o seguinte resultado:

		Quadrado de 15
1ª Parcela. Quadrado do primeito número.	$8 \times 8 = 64$	15
2ª Parcela. Duas vezes o primeiro número multiplicado pelo segundo	$(8 \times 7) + (8 \times 7) = 112$	15
		75
3ª Parcela. Quadrado do segundo número.	$(7 \times 7) = 49$	15
	225	225

Por uma simples inspeção vemos, que o quadrado de 15 é igual à soma das três parcelas obtidas por meio dos números 8 e 7, isto é, $15^2 = (8 \times 8) + (8 \times 7) + (8 \times 7) + (7 \times 7)$ ou $64 + 112 + 49 = 225$. A expressão $(8 \times 7) + (8 \times 7)$ póde ser simplificada ou reduzida a $2 (8 \times 7)$ que exprime exatamente o mesmo valor, porque quer dizer *duas vezes o produto de 8 multiplicado por 7*, isto é, duas vezes 56 ou 2×56.

Se dermos ao número 15 outra formação qualquer, o resultado será o mesmo; assim

$$15^2 = (9 + 6)^2 = (9 \times 9) + 2 (9 \times 6) + (6 \times 6) = 225,$$
$$15^2 = (10 + 5)^2 = (10 \times 10) + 2 (10 \times 5) + (5 \times 5) = 225,$$
$$15^2 = (11 + 4)^2 = (11 \times 11) + 2 (11 \times 4) + (4 \times 4) = 225,$$

Se, em lugar de 15, operarmos com outro número qualquer, acharemos a mesma relação entre o quadrado dêsse número e as duas parcelas que o formarem.

Por este processo sintético agrupamos ou reunimos em uma soma todas as partes que formam um quadrado; e por um processo oposto, poderemos decompôr ou separar novamente essas partes para, por meio delas, achar a base do quadrado. Dêste último processo trataremos mais adiante.

Problema. Formar sintèticamente o quadrado de 24, considerando as dezenas e unidades como duas parcelas de 24.

Solução. O número 24 é formado de 2 dezenas e 4 unidades, isto é, 20 + 4, então o seu quadrado sintético se forma do seguinte modo:

1° Quadrado das dezenas	$20 \times 20 = 400$
2° Duas vezes o produto das dezenas multiplicadas pelas unidades	$2(20 \times 4) = 160$
3° Quadrado dos unidades	$4 \times 4 = 16$
Quadrado de 24 que é (24×24)	576

Achar por esta fórma os quadrados dos seguintes numeros:

1. 18^2. Resp. $(10+8)^2 = 100 + 160 + 64 = 324$.
2. 23^2. " $(20+3)^2 = 400 + 120 + 9 = 529$.

3. 25^2.	Resp. ?	5. 32^2.	Resp. ?	7. 54^2.	Resp. ?
4. 28^2.	" ?	6. 46^2.	" ?	8. 68^2.	" ?

EXTRAÇÃO DAS RAÍZES

347. Raiz de um número é um dos fatores iguais que produziram êsse número.

As raizes, bem como as potências, distinguem-se pelo seu grau; assim, raiz quadrada ou segunda raiz, raiz cúbica ou terceira raiz, quarta raiz, quinta raiz, etc.

Raiz quadrada de um número é outro número que elevado ao quadrado reproduz o número dado; assim 5 é raiz quadrada de 25 porque $5^2 = 25$.

Raiz cúbica de um número é outro número que, elevado ao cubo, reproduz o número dado. Assim, 4 é raiz cúbica de 64, porque $4^3 = 64$.

A **quarta raiz** de um número é um dos quatro fatores iguais desse número; assim a quarta raiz de 81 é 3, porque $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$.

348. A figura $\sqrt{}$ chama-se **sinal radical,** e quando está escrito sôbre um número, mostra que êsse número deve ser tomado na raiz indicada pelo indice.

Indice é o número escrito no angulo do sinal **radical**, para mostrar o grau da raiz; assim

$\sqrt[2]{16}$	lê-se:	*raiz quadrada de 16.*
$\sqrt[3]{216}$	"	*raiz cúbica de 216.*
$\sqrt[4]{625}$	"	*quarta raiz de 625.*
$\sqrt[10]{1024}$	"	*décima raiz de 1024.*

Nota. O sinal $\sqrt{\ }$ é uma corrupção da letra r, inicial da palavra latina *radix* que significa raiz.

Na raiz quadrada escreve-se simplesmente o sinal $\sqrt{\ }$ ficando subentendido o índice **2**.

Qualquer raiz de 1 é sempre 1, porque toda potência da unidade é igual à própria unidade.

349. Os quadrados perfeitos desde 1 até 100 são os seguintes:

Quadrados perfeitos:	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.
Raízes quadradas:	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Vemos aquí que desde 1 até 100 há só dez números inteiros que são quadrados perfeitos, isto é, produtos de dois fatores iguais, e até 1000, há só trinta e um; todos os outros números intermediários não são quadrados. Daqui se originou a divisão dos números inteiros em quadrados perfeitos e quadrados imperfeitos.

Quadrado perfeito é o número cuja raiz quadrada pode ser exatamente determinada; assim 64 é um quadrado perfeito, porque tem uma raiz exata, que é 8.

Quadrado imperfeito é o número cuja raiz quadrada não pode ser exatamente determinada; assim a raiz quadrada de 10 por mais aproximada que seja, multiplicada por si, não produzirá exatamente o número 10, e por isto tem o nome de **raiz aproximada** para distingui-la da **raiz exata** dos quadrados perfeitos.

350. Pela simples inspeção de um número qualquer, não podemos saber se êle é ou não quadrado perfeito, sem extrairmos a sua raiz quadrada; temos, porém, alguns dados ou teoremas que nos fazem conhecer de antemão que certos números não são quadrados. Esses teoremas são os seguintes:

1º Teorema. *Todo número terminado em 2, 3, 7 ou 8, não é quadrado perfeito.*

Demonstração. O algarismo em que termina um quadrado representa as unidades de um produto de dois números iguais, isto é, o produto da raiz quadrada multiplicada por si mesma. Ora o produto de dois números iguais

acaba sempre em 1, 4, 5, 6, 9 ou 0. Portanto os números terminados em 2, 3, 7 ou 8 não são quadrados perfeitos, porque não podem ser o produto de dois números iguais.

2º Teorema. *Todo número terminado por um número ímpar de zeros não é quadrado perfeito.*

Demonstração. Sendo um quadrado sempre o produto de dois fatores iguais, quando um fator termina em um, dois ou mais zeros, o quadrado terá o dobro dêsses zeros e por isso êles estarão em um quadrado sempre em número par; e assim podemos já saber de antemão que os números 1000, 400000 e 750 não são quadrados perfeitos.

3º Teorema. *Todo número par que não fôr divisivel por 4, não é quadrado perfeito.*

Demonstração. Todo o número par é divisível por 2, e se um número par fôr multiplicado por si mesmo, será divisível por 2, e por 2 × 2 = 4. Dêste modo, já podemos saber que 322 e 1334 não são quadrados perfeitos.

4º Teorema. *Todo número terminado em 5, e que nas dezenas não tem o algarismo 2, não é quadrado perfeito.*

Demonstração. Um número terminado em 5 só pode ter uma raiz terminada em 5, quando tem o algarismo 2 nas dezenas, porque o produto de dois números iguais terminados em 5 finaliza sempre por 25.

EXTRAÇÃO DA RAIZ QUADRADA

351. Extrair a raiz quadrada de um número é achar o fator que, multiplicado por si, produz êsse número.

Se dividirmos um número em classes de dois algarismos, começando pela direita, conheceremos logo quantos algarismos tem a sua raiz quadrada; assim, o número 55696 dividido em classes de dois algarismos, que são 5.56.96 mostra logo que a sua raiz quadrada tem três algarismos, porque êste número consta de três classes; o número 8649, como consta de duas classes, que são 86.49, a sua raiz tem dois algarismos, etc. A' última classe, que é a da esquerda, pode ter um ou dois algarismos; as outras classes devem ter sempre dois. Daquí podemos deduzir o seguinte principio:

Quantas classes de dois algarismos tiver um número, tantos algarismos terá a sua raiz quadrada.

Problema. Qual é a raiz quadrada de 576?

Solução analítica. O número 576, como consta de duas classes, já sabemos que a sua raiz quadrada tem dois algarismos, sendo um das dezenas e outro das unidades. Precisamos portanto achar o algarismo das dezenas e depois, o algarismo das unidades.

Algarismo das dezenas. Como já demonstrâmos na seção **346**, o número 576, sendo quadrado perfeito, deve conter: *1º o quadrado das dezenas, 2º duas vezes o produto das dezenas multiplicadas pelas unidades, 3º o quadrado das unidades.*

A classe da esquerda, que é 5, contém o quadrado das dezenas, porque dezenas multiplicadas por dezenas dão centenas. O quadrado perfeito mais aproximado de 5 é 4, e a raiz de 4 é 2; **2** é o algarismo das dezenas da raiz. Ora o quadrado de 2 é 2 × 2 = 4, e subtraindo 4 de 5, resta uma centena que com a classe seguinte forma o resto 176.

Como já saíu o quadrado das dezenas, este resto deve conter *duas vezes o produto das dezenas multiplicadas pelas unidades, mais o quadrado das unidades.*

Operação

5.7 6	Raiz 24
4	
—	
1 7 6	44
1 7 6	4
——	——
0 0 0	176

Algarismo das unidades. Desde que o produto das dezenas multiplicadas por um número inteiro de unidades nunca pode ser inferior a 10, podemos separar do resto 176 o algarismo das unidades, que é 6, para operarmos sòmente com as 17 dezenas completas.

Sendo as 17 dezenas *duas vezes o produto das dezenas multiplicadas pelas unidades*, segue-se que se dividirmos 17 por duas vezes as dezenas, isto é, por 2 × 2 = 4, obteremos o algarismo das unidades. Ora, 17 ÷ 4 = 4, portanto, **4** é o algarismo das unidades da raiz.

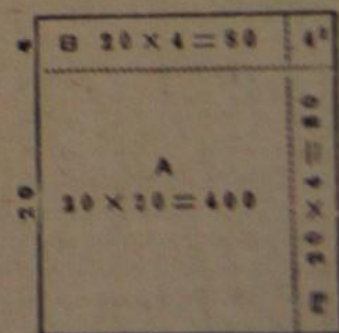
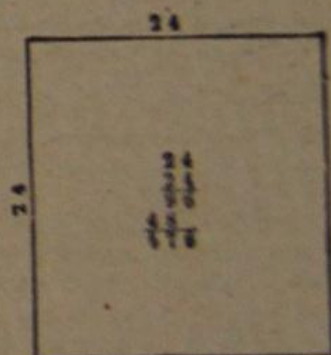
Resta agora verificar se o resto 176 contém 2(20 × 4) = 160, mais 4 × 4 = 16. Ora 160 + 16 = 176, e do resto 176 subtraindo 176, nada resta. Fica, portanto, demonstrado que 576 é um quadrado perfeito, e que a sua raiz quadrada é 24.

Verificação geométrica da raiz quadrada

352. O primeiro diagrama que está ao lado, representa um quadrado perfeito, medindo 24 metros de cada lado, tendo, portanto, uma área de 24 × × 24 = 576 metros quadrados.

Figuremos agora que nos dão esta área de 576 metros quadrados e requerem de nós o comprimento de um dos lados dêste quadrado. A resposta será fácil; extraíremos a raiz quadrada de 576, e logo veremos que a raiz quadrada ou um dos lados dêste quadrado é 24 metros.

Verificação geométrica. A composição de um quadrado e a extração da sua raiz quadrada podem também ser demonstradas geomètricamente. Assim, o segundo diagrama representa um quadrado igual ao primeiro, mas decomposto ou dividido nas quatro superfícies que o constituem (n.º **346**).

A superfície **A** mede 20 × 20 = 400 metros quadrados e representa o *quadrado das dezenas*. As superfícies **B** e **B** medem cada uma

$20 \times 4 = 80$ metros quadrados, e, como são duas, somam $2(20 \times 4) = 160$ metros quadrados; elas representam *duas vezes o produto das dezenas multiplicadas pelas unidades*. A superfície menor 4^2 mede $4 \times 4 = 16$, e representa o quadrado das unidades. Subtraindo do quadrado inteiro o quadrado das dezenas, que é a área A, restam as seguintes superfícies.

B 20	B 20	4

O modo geométrico de achar a área destas três superfícies postas em linha, é multiplicar o seu comprimento pela sua largura. Ora, sendo o seu comprimento $20 + 20 + 4 = 44$, e a largura 4, a sua superfície é $44 \times 4 = 176$ metros quadrados, que é quanto o quadrado inteiro ou completo excede ao quadrado das dezenas, isto é, quanto 576 excede a 400.

Se agora observamos o modo por que extraímos a raiz quadrada de 576 (n.º 351) havemos de notar que, para formar o excedente do quadrado das dezenas, dobrâmos as dezenas e lhes acrescentâmos as unidades, isto é, reunimos $20 + 20 + 4 = 44$, e depois multiplicâmos esta soma pelas unidades, e obtivemos $44 \times 4 = 176$, tudo justamente como acabâmos de fazer para achar a área das três superfícies excedentes ao quadrado das dezenas.

Modo geral de extrair a raiz quadrada

353. O modo geral ou pratico de extrair a raiz quadrada é o seguinte:

Problema. Qual é a raiz quadrada de 1 8 2 3 2 9 ?

Operação

```
1 8.2 3.2 9  |  Raiz 427
1 6          |------------------
-----        |  82 × 2 = 164
  2 2 3      |
  1 6 4      |  847 × 7 = 5929
  -------    |
    5 9 2 9  |
    5 9 2 9  |
    -------  |
    0 0 0 0  |
```

Solução. O número 182329, como consta de três classes, a sua raiz há de ter três algarismos, isto é, centenas, dezenas e unidades. Começa-se sempre a extração pela primeira classe à esquerda.

A raiz-quadrada de 18 é 4, porque 5^2 dá $5 \times 5 = 25$. Escreve-se 4 como o primeiro algarismo da raiz, e subtrai-se de 18 o quadrado de 4, que é 16; o resto 2 com a classe seguinte forma o novo dividendo. Dobra-se a raiz que fica $4 + 4 = 8$, e escreve-se ao lado do dividendo como um divisor auxiliar. (Chama-se divisor auxiliar, porque auxilia a achar o algarismo seguinte da raiz.)

Para se achar o algarismo das dezenas, divide-se o dividendo 223, sem o último algarismo da direita, pelo divisor auxiliar 8, e o quociente, que é $22 \div 8 = 2$, é o segundo algarismo da raiz. Nesta divisão despreza-se o resto. Escreve-se, portanto, 2 na raiz, escreve-se também 2 junto ao divisor auxiliar que fica 82 e divisor completo. Multiplica-se êste divisor pelo número 2 que se acabou de achar, e o produto $82 \times 2 = 164$ subtraído do dividendo 223 deixa 59 de resto. Este resto com a classe seguinte, forma o último dividendo 5929.

Para se achar o último algarismo da raiz, desce-se 84, que é o dôbro da parte já achada da raiz (2×42), para servir de novo divisor auxiliar; divide-se o último dividendo (sem o último algarismo) pelo divisor auxiliar, e o quociente, que é $592 \div 84 = 7$, é o último algarismo da raiz. Escreve-se 7 na raiz; acrescenta-se 7 ao divisor auxiliar que fica então 847, e êste di-

visor multiplica-se pelo último algarismo da raiz; dá o produto 5929 que, subtraído do dividendo, não deixa resto. Logo 182329 é um quadrado perfeito, e a sua raiz quadrada é 427.

Prova $427 \times 427 = 182329$.

Regra. *I. Para se extrair a raiz quadrada de um número, divide-se êsse número em classes de dois algarismos cada uma, começando da direita.*

II. Acha-se o maior quadrado perfeito contido na última classe à esquerda e escreve-se a sua raiz ao lado direito, em forma de divisor; será êste o primeiro algarismo da raiz procurada. Subtrai-se o quadrado perfeito daquela classe, e o resto junto com a classe seguinte formará o novo dividendo.

III. Dobra-se a parte da raiz achada e escreve-se como um divisor auxiliar ao lado do dividendo; acha-se quantas vezes o divisor é contido no dividendo, excluindo dêste o último algarismo da direita; o quociente se escreve como segundo algarismo da raiz e também à direita do divisor.

IV. Multiplica-se agora o divisor completo pelo novo algarismo da raiz e o produto subtrai-se do dividendo; o resto, junto com a classe seguinte, formará o novo dividendo.

V. Dobra-se a parte já achada da raiz e escreve-se como um divisor auxiliar. O processo continua como acima, até todas as classes serem divididas.

Notas importantes. 1ª Quando um divisor auxiliar é maior do que o seu respectivo dividendo escreve-se um zero na raiz, outro no divisor e desce-se outra classe para o dividendo, e depois prossegue-se a operação.

2ª Se houver resto, depois de se achar a raiz da última classe o número será um quadrado imperfeito e a sua raiz só pode ser obtida aproximadamente. Para se aproximar a raiz, junta-se classe de zeros ao resto, e escreve-se a vírgula decimal no fim da parte inteira da raiz, para mostrar que os algarismos que seguem são decimais.

3ª Quando os dois termos de uma fração ordinária não são quadrados perfeitos, podemos achar a sua raiz aproximada, reduzindo a fração ordinária a uma fração decimal (n.º 175) e depois extraindo a sua raiz quadrada.

4ª As classes de uma fração decimal contam-se da esquerda para a direita a partir da vírgula, e se a última classe da direita fôr incompleta, completa-se com uma cifra.

O aluno extrairá a raiz quadrada dos seguintes números:

		Respostas			Respostas			Respostas
1.	$\sqrt{625}$	25	5.	$\sqrt{390625}$	?	9.	[illegible]	?
2.	$\sqrt{6561}$	81	6.	$\sqrt{516961}$	?	10.	[illegible]	?
3.	$\sqrt{1521}$	39	7.	$\sqrt{1679616}$	?	11.	[illegible]	?
4.	$\sqrt{7225}$	85	8.	$\sqrt{5764801}$	?	12.	[illegible]	?

13. Qual é a raiz quadrada de 234,09? Resp. 15,3
14. Qual é a raiz quadrada de $\frac{3721}{7569}$? " $\frac{61}{87}$
15. Qual é a raiz quadrada de $60\frac{1}{16}$? " $7\frac{3}{4}$
16. Qual é a raiz quadrada de 10? " 3,16227...

Método simples de extrair a raiz quadrada dos quadrados perfeitos

354. Vamos expor agora um método muito simples e fácil de extrair a raiz quadrada, mas que serve sòmente para os quadrados perfeitos. Este método consiste em decompor o número dado em seus fatores primos (n.° **106**), e depois multiplicar entre si a metade dêsses fatores.

Problema. Qual é a raiz quadrada de 576?

Solução. Decompondo o número 576 em seus fatores primos, segundo a regra exposta no n.° **106**, temos os fatores 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3. Escrevendo estes fatores em pares de fatores iguais, como vemos no no processo ao lado, e multiplicando entre si um fator de cada par, temos 2 × 2 × 2 × 3 = 24, que é a raiz quadrada de 576.

Processo

576	2
288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	.

2, 2, 2, 3

2 × 2 × 2 × 3 = 24

Demonstração. Todo quadrado perfeito é o produto de dois números iguais, isto é, da raiz quadrada multiplicada por si mesma. Se estes dois números iguais não são primos, então são compostos de dois ou mais fatores primos, e os mesmos fatores que tiver um número, terá necessàriamente também o outro, porque são números iguais; por isso todo quadrado perfeito deve ter um certo número de pares de fatores, e em cada par deve haver dois fatores iguais. Decompondo o número 576 em seus fatores primos, achamos 8 fatores; ora, como o número 576 é o produto de dois números iguais, segue-se que metade dos fatores forma um dêsses números iguais, e a outra metade forma o outro.

Regra. *Para se achar a raiz quadrada de um número, decompõe-se o número em seus fatores primos; dispõem-se êsses fatores em pares de fatores iguais, toma-se um fator de cada par, os fatores tomados multiplicam-se entre si, e o produto será a raiz quadrada.*

Nota. Se o número dado não tiver um número par de fatores, ou se em cada par os fatores não forem iguais, o número dado não será quadrado perfeito.

Extrair, por êste modo, a raiz quadrada dos seguintes números:

		Respostas			Respostas			Respostas
1.	$\sqrt{144}$	12	4.	$\sqrt{784}$	?	7.	$\sqrt{7744}$	?
2.	$\sqrt{196}$	14	5.	$\sqrt{1024}$	?	8.	$\sqrt{8281}$	?
3.	$\sqrt{1764}$	42	6.	$\sqrt{7056}$	?	9.	$\sqrt{9216}$	?

EXTRAÇÃO DA RAIZ CÚBICA

355. Extrair a raiz cúbica de um número é decompô-lo em três fatores iguais, ou achar um número, que elevado ao cubo, produza o número dado. A raiz cúbica de 125 é 5, porque $5 \times 5 \times 5 = 125$.

Para se poder extrair a raiz cúbica de um número é conveniente saber de cór o cubo dos dez primeiros números.

Números:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Cubos:	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

Para compreendermos o processo da extração da raiz cúbica, é necessário conhecermos o seguinte teorema:

O cúbo de um número composto de unidades e dezenas é igual ao cúbo das dezenas, mais três vezes o quadrado das dezenas multiplicado pelas unidades, mais três vezes as dezenas multiplicadas pelo quadrado das unidades, mais o cúbo das unidades.

Ilustração. O número 24 é composto de 2 dezenas e 4 unidades ou 20 + 4; se quisermos agora formar o seu cubo pelo enunciado dêste teorema, teremos de somar as seguintes parcelas componentes:

1ª Cubo das dezenas	$20 \times 20 \times 20 =$	8000
2ª Três vezes o quadrado das dezenas multiplicado pelas unidades	$3(20^2 \times 4) =$	4800
3ª Três vezes as dezenas multiplicadas pelo quadrado das unidades...	$3(20 \times 4^2) =$	960
4ª Cubo das unidades	$4 \times 4 \times 4 =$	64
Cubo de 24		= 13824

Cubo de 24

```
    24
    24
    --
    96
   48
   ---
   576
    24
  ----
  2304
 1152
 -----
 13824
```

Vemos nesta ilustração que o cubo de 24, formado pelo enunciado dêste teorema, é igual ao cubo formado pela multiplicação continuada que está à margem.

356. Por meio de algumas figuras geométricas podemos tornar até intuitiva a verdade dêste teorema.

Exposição. As diversas figuras ou volumes que estão à margem, representam as partes componentes de um cubo perfeito que tem 24 polegadas de aresta e que mede $24 \times 24 \times 24 = 13824$ polegadas cúbicas.

Analisando as dimensões de cada uma destas peças, notamos o seguinte resultado:

A figura ou volume A, medindo 20 polegadas de comprimento, 20 de largura, e 20 de altura, tem $20 \times 20 \times 20 = 8000$ polegadas cúbicas, e representa **o cubo das dezenas.**

As figuras B, B e B tendo 20 polegadas de comprimento, 20 de largura e 4 de altura, conteem, cada uma, $20 \times 20 \times 4$ ou $20^2 \times 4 = 1600$ polegadas cúbicas; e como são três volumes conteem $3\ (20^2 \times 4) = 4800$ polegadas cúbicas, e representam **três vezes o produto do quadrado das dezenas multiplicado pelas unidades.**

As figuras 0, 0 e 0 como medem 20 polegadas de comprimento, 4 de largura e 4 de altura, conteem, cada uma, $20 \times 4 \times 4$ ou $20 \times 4^2 = 320$ polegadas cúbicas; e como são 3 volumes, conteem $3\ (20 \times 4^2) = 960$ polegadas cúbicas, e representam **três vezes o produto das dezenas multiplicadas pelo quadrado das unidades.**

Finalmente a figura C, como mede 4 polegadas de comprimento, 4 de largura, e 4 de altura, contém $4 \times 4 \times 4 = 64$ polegadas cúbicas, e representa **o cubo das unidades.**

Todas estas peças, reunidas de um modo adequado em um só volume, constituem um cubo perfeito de 13824 polegadas cúbicas, como se vê na figura P.

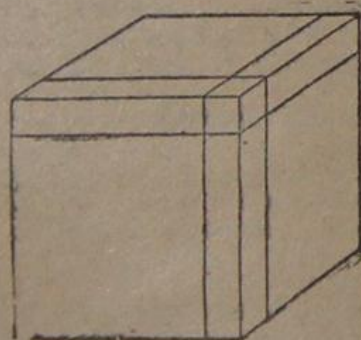
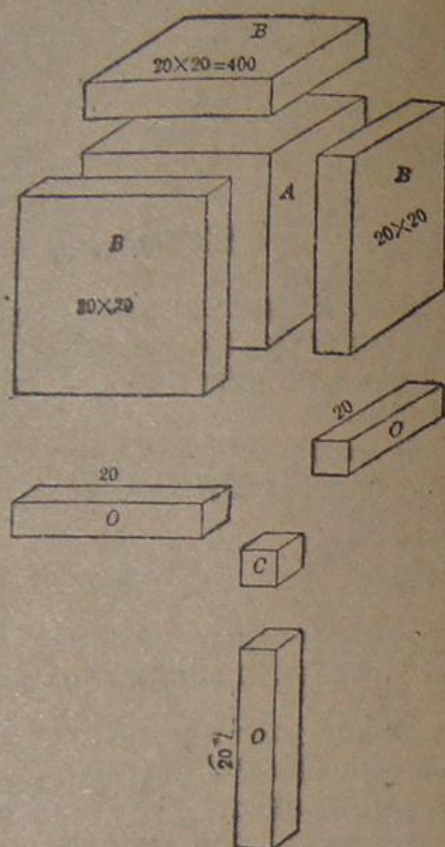



Figura P

357. Na extração da raiz cúbica divide-se o número dado em classes de três algarismos, e quantas classes tiver o número, tantos algarismos terá a raiz. A última classe da esquerda pode ter um, dois ou três algarismos, mas é sempre contada como uma classe.

Problema. Qual a raiz cúbica de 13824?

13.824	Raiz 24	
8		
5824	1200 = 20 × 20 × 3	
	240 = 20 × 4 × 3	
	16 = 4 × 4	
	1456	Divisor completo
5824	4	
0000	5824	

Solução. Dividindo o número dado em classes de três algarismos acharemos duas classes; e por isso, a raiz constará de dois algarismos, isto é, terá dezenas e unidades.

Na primeira classe deve estar contido o cubo das dezenas; ora o maior cubo perfeito contido em 13 milhares é 8 milhares, e a raiz cúbica de 8 é 2; portanto 2 será o primeiro algarismo da raiz para representar as dezenas. Subtraindo da primeira classe o cubo perfeito das dezenas, que é 8, restam 5 milhares, os quais juntos com a classe seguinte, formam 5824 unidades, total de 3 vezes o quadrado das dezenas multiplicado pelas unidades, mais 3 vezes as dezenas multiplicadas pelo quadrado das unidades, e mais o cubo das unidades.

O número das dezenas já nós sabemos que é 2 ou 20 unidades; quadrando as dezenas, e multiplicando-as depois por 3, teremos 20 × 20 × 3 = 1200.

Dividindo agora 5824 por 1200, obtemos o número de unidades, que é 4; portanto 4 é o segundo algarismo da raiz, isto é o que representa as unidades. O número 1200 chama-se divisor auxiliar, porque auxilia a achar o algarismo seguinte da raiz.

Multiplicando as dezenas pelas unidades e depois por 3, temos 20 × 4 × 3 = 240 Quadrando as unidades temos 4 × 4 = 16. Somando agora estas duas parcelas com o divisor auxiliar, temos o total de 1456, que é o divisor completo.

Se multiplicarmos agora esta soma pelo número das unidades, que é 4, temos 5824, valor igual ao que somariam estas três parcelas, se cada uma separadamente fosse multiplicada por 4.

A primeira parcela multiplicada por 4, fica igual a três vezes o quadrado das dezenas multiplicado pelas unidades.

A segunda parcela, multiplicada por 4, fica igual a três vezes as dezenas multiplicadas pelo quadrado das unidades.

A terceira parcela, multiplicada por 4, fica igual ao cubo das unidades.

Subtraindo, pois, o produto 5824 do dividendo 5824, nada restará. Logo o número 13824 é um cubo perfeito, e a sua raiz cúbica é 24.

358. O método prático de extrair a raiz cúbica é o seguinte:

Problema. Qual é a raiz cúbica de 413493625?

```
413.493.625    | Raiz 745
343            |
———            | ——————
70493          | 14700 = 7 × 7 × 300
               |   840 = 7 × 4 × 30
               |    16 = 4 × 4
               | ——————
               | 15556 = Divisor completo
               |     4 = Segundo algarismo da raiz
               | ——————
62224          | 62224
———            | ——————
 8269625       | 1642800 = 74 × 74 × 300
               |   11100 = 74 × 5  × 30
               |      25 =  5 × 5
               | ————————
               | 1653925 = Divisor completo
 8269625       |       5 = Terceiro algarismo da raiz
———————        | ————————
 0000000       | 8269625
```

Metodo prático da extração. Divide-se o número dado em classes de 3 algarismos, e logo se reconhece que a raiz cúbica tem 3 algarismos, porque foram 3 as classes formadas.

Começa-se sempre a extração da raiz pela primeira classe da esquerda. O maior cubo perfeito contido em 413 é 343, cuja raiz cúbica é 7. Escreve-se, pois, o número 7 como o primeiro algarismo da raiz para ocupar a ordem das centenas. Subtrai-se o cubo 343 de 413, e o resto 70, com a classe seguinte, forma o novo dividendo 70493.

Quadrando a raiz já achada, que é 7, e multiplicando o quadrado por 300, temos $7 \times 7 \times 300 = 14700$; êste número, como nos vai indicar o segundo algarismo da raiz, chama-se divisor auxiliar.

Para se achar o segundo algarismo da raiz, divide-se o dividendo 70493 pelo divisor auxiliar 14700, e o quociente será o segundo algarismo da raiz.

O quociente é 4; portanto, 4 será o segundo algarismo da raiz, e ali ocupará a ordem das dezenas. Multiplica-se em seguida o primeiro algarismo da raiz pelo segundo e depois por 30, e tem-se $7 \times 4 \times 30 = 840$; quadrando-se em seguida o segundo algarismo da raiz, tem-se $4 \times 4 = 16$. Somam-se estas duas quantidades com o divisor auxiliar, e tem-se 15556, que é o divisor completo. Multiplica-se êste divisor pelo segundo algarismo da raiz, que é 4, e temos o produto 62224. Subtrai-se êste produto do dividendo, e o resto 8269, junto com a classe seguinte, formará o novo dividendo 8269625.

Tomam-se os dois algarismos da raiz como um só número, quadra-se êsse número e depois multiplica-se por 300, e tem-se $74 \times 74 \times 300 = 1642800$.

Para acharmos o seguinte algarismo da raiz, dividiremos o dividendo pelo divisor, e o quociente será o terceiro algarismo da raiz. O quociente é 5, e por isso 5 ocupará na raiz a ordem das unidades. Prossegue-se nesta operação como na de cima, tomando 74 pelo primeiro número da raiz, e 5 pelo segundo. Se houvesse ainda outra classe para dividir, tomar-se-ia 745 como o primeiro número, e o algarismo que se tinha de achar, como o segundo número.

Regra. *I. Para se achar a raiz cúbica de um número, divide-se o número dado em classes de três algarismos.*

II. Acha-se o maior cubo perfeito contido na primeira classe da esquerda, e escreve-se a sua raiz ao lado direito do número,

em forma de divisor. Subtrai-se o cúbo perfeito da primeira classe, e o resto junto com a segunda classe formará o novo dividendo.

III. Quadra-se a raiz achada e multiplica-se por 300; o produto será o primeiro divisor auxiliar. Divide-se o dividendo pelo divisor auxiliar, e o quociente será o segundo algarismo da raiz. Multiplica-se êste último algarismo achado pelo primeiro e depois por 30; quadra-se ainda êste último algarismo da raiz, e adicionando-se estas duas quantidades com o divisor auxiliar, a soma será o divisor completo.

IV. Multiplica-se o divisor completo pelo último algarismo da raiz, e o produto subtrai-se do novo dividendo; o resto, junto com a classe seguinte, formará um novo dividendo: e assim se procede até todas as classes serem divididas.

Nota. 1.ª Se o divisor auxiliar fôr maior do que o respectivo dividendo, escreve-se um zero na raiz, e desce-se outra classe para o dividendo.

2.ª Quando o cubo é imperfeito, ficará sempre um resto na divisão da última classe, mas a operação póde ser continuada, pondo-se uma vírgula decimal no fim da raiz, para mostrar que os algarismos que seguem são decimais, e acrescentando-se classes de zeros ao dividendo.

3.ª Extraindo-se a raiz cúbica de uma fração decimal, marcam-se as classes da esquerda para a direita, a partir da vírgula, e se a última classe da direita não estiver completa, completa-se com cifras.

4.ª Para se extrair a raiz cúbica de uma fração ordinária, reduz-se a fração à sua expressão mais simples, e se ambos os seus termos forem cubos perfeitos, extrai-se a raiz de cada um, e se um ou ambos os termos forem cubos imperfeitos, reduz-se a fração ordinária a uma fração decimal, e extrai-se a raiz.

Achar a raiz cúbica dos seguintes números:

		Respostas			Respostas			Respostas
1.	$\sqrt[3]{74088}$	42	4.	$\sqrt[3]{912673}$	?	7.	$\sqrt[3]{658503}$	?
2.	$\sqrt[3]{91125}$	45	5.	$\sqrt{1953125}$	?	8.	$\sqrt[3]{531441}$	?
3.	$\sqrt[3]{195112}$	58	6.	$\sqrt[3]{884736}$	?	9.	$\sqrt[3]{970299}$	?

10. Qual é a raiz cúbica de $\frac{2744}{6859}$? — Resp. $\frac{14}{19}$
11. Qual é a raiz cúbica de 53,157376? — " 3,76
12. Qual é a raiz cúbica de 1953,125? — " 12,5

Método simples de extrair a raiz cúbica dos cubos perfeitos

359. O método que agora vamos expor só poderá ser usado na extração da raiz cúbica dos cubos perfeitos, mas tem a grande vantagem de ser muito simples e fácil, como podemos ver no seguinte problema:

Problema. Extrair a raiz cúbica de 13824, por meio da decomposição em seus fatores primos.

Solução. Decompondo-se o número 13824 em seus fatores primos, obtém-se doze fatores.

Escrevendo-se estes fatores em grupos, havendo três fatores iguais em cada grupo, e depois multiplicando-se entre si um fator de cada grupo, obtém-se o seguinte resultado:

2, 2, 2, 3
2, 2, 2, 3
2, 2, 2, 3
$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$.

13824	2
6912	2
3456	2
1728	2
864	2
432	2
216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

A raiz cúbica de 13824 é 24.

A demonstração e mais explicações dêste método já foram expostas na extração da raiz quadrada n.º 354.

Regra. *Para se extrair a raiz cúbica de um cubo perfeito, decompõe-se êsse número em seus fatores primos; dispõem-se estes fatores em grupos, havendo em cada grupo* ***três fatores iguais****, e o produto continuado de um fator de cada grupo será a raiz cúbica.*

Nota. Se cada grupo não tiver três fatores iguais, o número não será cubo perfeito.

Extrair por êste método a raiz cúbica dos seguintes números:

1.	$\sqrt[3]{4096}$	Resp. 16	4.	$\sqrt[3]{1728}$	Resp. ?
2.	$\sqrt[3]{5832}$	" 18	5.	$\sqrt[3]{3375}$	" ?
3.	$\sqrt[3]{27000}$	" 30	6.	$\sqrt[3]{15625}$	" ?

PROGRESSÕES

360. Progressão é uma série de números que crescem ou decrescem em certa ordem ou razão. Os números de uma progressão chamam-se termos.

Há duas sortes de progressões: a progressão por diferença que também tem o nome de *progressão aritmética*, e a progressão por quociente a que se dá também o nome de *progressão geométrica*.

PROGRESSÃO POR DIFERENÇA

361. Progressão por diferença ou progressão aritmética é uma série de números que crescem ou decrescem de uma quantidade constante chamada *razão de progressão aritmética*.

362. Na progressão por diferença, os termos estão separados por um ponto, e a série precedida pelo sinal ÷, como ÷ 2. 4. 6. 8. 10, etc.

Se os termos vão crescendo do primeiro para o ultimo, a progressão chama-se crescente, e a razão é positiva, porque se junta a cada termo. mas se os termos vão diminuindo, a progressão chama-se decrescente, e a razão é negativa, porque se subtrai de cada termo, como vemos no exemplo seguinte:

Progressão crescente ÷ 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 . etc.
Progressão decrescente ÷ 23 . 20 . 17 . 14 . 11 . 8 . 5 . 2 . etc.

Nota. Nestas duas progressões notamos que a diferença entre o primeiro termo e o segundo é a mesma que entre o segundo e o terceiro, e entre o terceiro e o quarto, etc., quer a série seja crescente, quer decrescente; por isto essa diferença se chama **comum.**

A razão de uma progressão pode ser também fracionária; como ÷ 5. $5\frac{1}{4}$. $5\frac{2}{4}$. $5\frac{3}{4}$. 6. $6\frac{1}{4}$. $6\frac{2}{4}$. etc.. Nesta progressão a razão é $\frac{1}{4}$.

363. Em qualquer progressão por diferença, há que distinguir cinco elementos com os quais temos de operar os diversos cálculos das progressões. Esses elementos são os seguintes:

1° *O primeiro termo.*
2° *O último termo.*
3° *A razão.*
4° *O número de termos.*
5° *A soma de todos os termos.*

Na progressão ÷ 5. 9. 13. 17. 21. 25., *o primeiro termo* é 5, *o último* é 25, *a razão* é 4, *o número de termos* é 6, *e a soma de todos os termos* é 90. O primeiro termo e o último chamam-se **extremos,** e os termos intermediários chamam-se **meios.**

Há tal relação entre estes cinco elementos, ou valores que, sendo conhecidos três, podemos facilmente achar os outros dois.

Achar o último termo, conhecendo o primeiro termo, a razão e o número de termos

364. Problema. Qual é o ultimo termo de uma progressão aritmética crescente, sendo 3 o primeiro termo, 4 a razão e 10 o número de termos?

Análise. O primeiro termo é 3; e, sendo 4 a razão, o segundo termo é 3 + 4 = 7; o terceiro é 3 + 4 + 4 = 11, e assim cada termo vai aumentando mais 4, que é a razão, de sorte que o décimo termo, que é o último, há de ter o primeiro termo, que é 3, mais 9 vezes a razão, isto é, uma vez menos do que o número de termos, porque o primeiro termo não tem a razão. O último termo é, pois, 3 + (4 × 9) = 39.

Fórmula

3 + (4 × 9) = 39

Regra. *Para se achar o último termo de uma progressão por diferença, junta-se ao primeiro termo o produto da razão multiplicada pelo número de termos menos 1.*

Se a progressão fôr decrescente, subtrai-se êsse produto do primeiro termo.

1. O primeiro termo de uma progressão é 3, a razão é 2, e o número de termos é 7; qual é o último termo? Resp. 15.

2. Achar o último termo de uma progressão crescente, sendo o primeiro termo 2, a razão 3, e o número de termos 50.
Resp. 149.

3. O ultimo termo de uma progressão crescente é 77; o número de termos é 19, e a razão é 3; qual é o primeiro termo?
Resp. 23.

Achar a razão, sabendo os extremos e o número de termos

365. Problema. O primeiro termo de uma progressão por diferença é 2, o último é 20, e o número de termos é 7; qual é a razão?

Análise. Subtraindo o primeiro termo do último, temos 20 — 2 = 18. Ora êste resto é igual ao produto da multiplicação da razão pelo número de termos, menos 1 (n.° 364). Dividindo agora o resto 18 pelo número de termos menos 1, que é 7 — 1 = 6, temos 3, que é a razão.

$$\frac{20-2}{7-1} = \frac{18}{6} = 3$$

Regra. *Para se achar a razão de uma progressão aritmética, divide-se a diferença entre os extremos pelo número de termos menos 1.*

1. Os extremos de uma progressão aritmética são 3 e 300, e o número de termos é 10; qual é a razão? Resp. 33.

2. As idades de 7 irmãos formam uma progressão aritmética; o mais moço tem 2 anos, e o mais velho 20; qual é a diferença comum das suas idades? Resp. 3.

3. O primeiro termo de uma progressão por diferença é 5 e o decimo segundo é 49; qual é a razão? Resp. ?

Achar o número de termos, conhecendo os extremos e a razão

366. Desde que a diferença entre os dois extremos dividida pelo número de termos menos 1 dá a razão (n. **365**), segue-se

que a diferença entre os extremos dividida pela razão e juntando 1 ao quociente deve dar o número de termos.

Problema. Em uma progressão por diferença os extremos são 10 e 70, a razão é 3; qual é o número de termos?

Solução. A diferença entre os extremos é $70 - 10 = 60$. Dividindo 60 pela razão que é 3, temos o quociente 20, e acrescentando-lhe 1, temos 21, que é o número de termos desta série.

Fórmula

$$\frac{70-10}{3} = \frac{60}{3} = 20$$

$$20 + 1 = 21$$

Regra. *Para se achar o número de termos, divide-se a diferença entre os extremos pela razão, e ao quociente acrescenta-se 1; o resultado será o número de termos.*

Resolver os seguintes problemas:

1. Os extremos são 2 e 53, e a razão é 3, qual é o número de termos da progressão aritmética? Resp. 18.

2. Os extremos são 6 e 31, e a razão é 5; qual é o número de termos da progressão aritmética? Resp. 6

3. Sendo os extremos 1 e 19, a razão é 2, qual é o número de termos da progressão por diferença? Resp. ?

Achar a soma de todos os termos, conhecendo os extremos e o número de termos

367. Problema. Qual é a soma de 6 termos de uma progressão por diferença sendo o primeiro termo 4 e o último 19?

Solução. A soma dos extremos é $4 + 19 = 23$ e a metade desta soma é $\frac{23}{2}$. Multiplicando $\frac{23}{2}$ pelo número de termos, achamos $\frac{23}{2} \times 6 = 69$, soma de todos os termos.

Fórmula

$$\frac{(4 + 19) \times 6}{2} = \frac{138}{2} = 69$$

Demonstração. A progressão é...... $\div\ 4 \,.\, 7 \,.\, 10 \,.\, 13 \,.\, 16 \,.\, 19$

A mesma progressão invertida.... $\div\ 19 \,.\, 16 \,.\, 13 \,.\, 10 \,.\, 7 \,.\, 4$

$$23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23 = 23 \times 6$$

Soma de cada progressão $$\frac{23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23}{2} = \frac{23 \times 6}{2} = \frac{138}{2} = 69.$$

Observamos neste processo que a soma dos termos que se correspondem nas duas progressões é sempre igual à soma dos extremos; por isso multiplicando a metade da soma dos extremos pelo número de termos, que é 6, teremos a soma de todos os termos, que é 69.

Regra. *Para se achar a soma de todos os termos de uma progressão por diferença, multiplica-se a metade da soma dos extremos pelo número de termos.*

1. Os extremos são 2 e 50, e o número de termos é 24. achar a soma de todos os termos desta série. Resp. 624.

2. Quantas pancadas sôa a campainha de um relógio desde 1 hora da madrugada até o meio dia? Resp. 78.

3. Achar a soma dos primeiros dez mil números na progressão ÷ 1. 2. 3. 4. 5. 6. etc. Resp. 50005000

Inserir meios aritméticos entre dois termos dados

368. Podemos facilmente inserir qualquer número de meios entre dois termos, e formar assim uma progressão tendo êsses dois termos para extremos. Os termos intercalados chamam-se *meios aritméticos*.

Problema. Inserir cinco meios aritméticos entre os números 6 e 30.

Fórmula

$$\frac{30-6}{5+1}=\frac{24}{6}=4$$

Solução. A diferença entre os dois números dados é 30 — 6 = 24. Dividindo 24 pelo número de termos que se quer inserir, aumentado em 1, temos 24 ÷ ÷ (5 + 1) = 4, que é a razão da progressão procurada.

Juntando agora 4 ao número menor, temos 6 + 4 = 10, que é o primeiro meio; 10 + 4 = 14 é o segundo; 14 + 4 = 18 é o terceiro, e assim por diante. De sorte que os cinco números inseridos entre 6 e 30 resulta a nova progressão aritmética ÷ **6** . 10 . 14 . 18 . 22 . 26 . **30.**

Regra. *Para se inserir qualquer número de meios aritméticos entre dois números, divide-se a diferença entre os dois números pelo número de meios que se quer inserir aumentado em 1. O resultado será a razão da progressão.*

1. Inserir quatro meios aritméticos entre os números 5 e 20. Resp. **5.** 8. 11. 14. 17. **20.**

2. Inserir dois meios aritméticos entre 4 e 40. Resp. **4.** 16. 28. **40.**

3. Inserir quatro meios aritméticos entre 2 e 3. Resp. **2.** $2\frac{1}{5}$. $2\frac{2}{5}$. $2\frac{3}{5}$. $2\frac{4}{5}$. **3.**

4. Inserir um meio aritmético entre 8 e 54. Resp. **8.** 31. **54.**

5. Inserir vinte e um meios aritméticos entre 36 e 80 Resp. ?

6. Inserir treze meios aritméticos entre 4 e 32. Resp. ?

PROGRESSÃO POR QUOCIENTE

369. Progressão por quociente ou progressão geométrica é uma série de números, cada um dos quais se obtém multiplicando ou dividindo o antecedente por uma quantidade constante chamada *razão da progressão geométrica.*

O sinal da progressão por quociente é ÷÷ escrito antes da série, como

Progressão crescente ÷÷ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : etc.
Progressão decrescente ÷÷ 48 : 24 : 12 : 6 : 3 : etc.

370. Em uma progressão por quociente, temos também de distinguir os cinco elementos do calculo, que são

1° O primeiro termo.	*4° O número de termos.*
2° O último termo.	*5° A soma de todos os termos.*
3° A razão.	

Achar o último termo, sendo conhecidos o primeiro termo, a razão e o número de termos

371. Problema. O primeiro termo de uma progressão geométrica crescente é 2, a razão é 3; qual é o quinto termo?

Análise. O primeiro termo é 2, e como a razão é 3, o segundo termo é 2×3, o terceiro termo é $2 \times 3 \times 3$, o quarto termo é $2 \times 3 \times 3 \times 3$, e o quinto termo $2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ ou $2 \times 3^4 = 162$.

Fórmula

$3^4 \times 2 = 81 \times 2 = 162$

Logo, o quinto termo, que é último, é o produto do primeiro termo multiplicado pela razão elevada a uma potência cujo expoente o número de termos *menos* 1.

Regra. *Para se achar o último termo de uma progressão geométrica, multiplica-se o primeiro termo pela razão elevada a uma potência cujo expoente seja o número de termos menos 1.*

Nota. 1.ª Se a progressão fôr decrescente, divide-se o primeiro termo pela potência referida.

2.ª Podemos achar o valor de qualquer termo de uma progressão, considerando-o como o último termo.

1. O primeiro termo de uma progressão geométrica é 2; a razão é 2, e o número de termos é 13; qual é o último termo? Resp. 8192.

2. O primeiro termo de uma progressão por quociente é 5; a razão é 4; qual é o oitavo termo? Resp. 81920.

3. O primeiro termo de uma progressão geométrica decrescente é 262144, a razão é 4, o número de termos é 9; qual é o último termo? Resp. 4.

4. Um pai prometeu a seu filho 20 centavos pelo primeiro problema de Aritmética que êle resolvesse; 40 centavos pelo segundo; 80 centavos pelo terceiro, e assim por diante; quanto lhe deveria dar pelo décimo problema? Resp. Cr$ 102,40.

Achar a soma de todos os termos de uma progressão, sendo conhecidos os extremos e a razão

372. Qual é a soma de todos os termos de uma progressão por quociente, sendo 2 o primeiro termo, 162 o último, e 3 a razão?

Análise. Desde que cada termo se forma do termo antecedente multiplicado pela razão segue-se que a série é 2, 6, 18, 54, 162.

$$\frac{(162 \times 3) - 2}{3 - 1} = \frac{484}{2} = 242$$

A soma da série é .... $= 2 + 6 + 18 + 54 + 162$

A mesma série multiplicada por 3....... $= \quad 6 + 18 + 54 + 162 + 486$

Subtraíndo a 1.ª da 2.ª, resta .... $486 - 2 = 484$

O resto 484 é duas vezes a soma da progressão. Dividindo 484 por 2, temos $484 \div 2 = 242$, que é a exata soma da progressão. Ora 486 é o último termo da série multiplicado pela razão 3; dividindo, pois, a diferença entre êste produto e o primeiro termo 2, pela razão menos 1, isto é, por $3-1=2$, temos o quociente 242, que é a soma de todos os termos. Daquí podemos formular a seguinte

Regra. *Multiplica-se o último termo pela razão, e divide-se a diferença entre êste produto e o primeiro termo, pela razão menos 1.*

1. O primeiro termo de uma progressão geométrica é 4, a razão é 3, e o último termo é 972; qual é a soma de todos os termos? Resp. 1456.

2. O primeiro termo é 4, o último é 1024, e a razão é 2; qual é a soma de todos os termos? Resp. 2044.

3. O primeiro termo é 5, o último termo é 98415, e a razão é 3; qual é a soma de todos os termos? Resp. 147620.

4. O primeiro termo é 10, a razão é 3, e o número de termos é 7; qual é a soma de todos os termos? Resp. 10930.

Nota. Quando, em lugar do último termo, se oferece o número de termos, como nos problemas 4 e 5, acha-se antes o último termo pela regra do n.° 371, e depois prossegue-se conforme a regra acima.

5. O rei da Persia, querendo recompensar o autor do jogo de xadrez, pela sua invenção, disse-lhe que satisfaria um dos seus desejos, fosse êle qual fosse. O autor, mostrando ao rei o taboleiro de xadrez com 64 quadros, pediu-lhe que pusesse 1 grão de trigo no primeiro quadro, 2 no segundo, 4 no terceiro, e assim dobrando até o quadro 64. Que quantidade de grãos de trigo tinha que dar o rei? Resp. 18446744073709551615.

Nota. Grande foi a admiração do rei, quando soube do seu intendente que tinha dado mais do que o seu reino valia. A Persia inteira semeada de trigo não produziria em um ano o que o autor do jogo de xadrez pedia.

6. Um homem vendeu 8 cavalos com a condição de receber pelo primeiro Cr$ 1,00, pelo segundo Cr$ 3,00, pelo terceiro Cr$ 9,00 e assim por diante; quanto recebeu êle pelos 8 cavalos? Resp. Cr$ 3280,00.

7. O primeiro termo de uma progressão crescente por diferença é 7; a razão é 4, e o número de termos é 10; qual é o último termo? Resp. 43.

8. O primeiro termo de uma progressão crescente por diferença é 10; a razão é 5; qual é o centésimo termo? Res. 505.

9. Achar a soma de 20 termos da série 1, 3, 5, 7, 9, 11 etc. Resp. 400.

LOGARITMOS

373. Logaritmos são os termos de uma progressão por diferença, cujo primeiro termo é zero, correspondentes aos de outra progressão por quociente, cujo primeiro termo é a unidade.

Ilustração. Ha uma analogia notável entre a progressão por diferença e a progressão por quociente. O que em uma se faz pela multiplicação ou divisão, na outra se faz pela adição ou subtração: e o que em uma se faz pela elevação das potências ou extrações das raízes, na outra se opera simplesmente por uma multiplicação ou divisão.

O escocez Napier, barão de Markinston, inventor dos logaritmos, despertado por esta analogia, fez corresponder a uma série de números que estavam em progressão por quociente, uma outra série de números que estavam em progressão por diferença, e por meio desta concordância, reduziu muitas operações laboriosas e complicadas do cálculo às quatro simples operações fundamentais da Aritmética. Dêste modo foi descoberta a teoria dos logaritmos, achado precioso que tem prestado imenso auxílio às ciências matemáticas.

374. Se compararmos duas progressões, uma por quociente, começando pela unidade ou 1, e a outra por diferença, começando por zero (0), cada termo da progressão por diferença será o logaritmo do seu termo correspondente na progressão por quociente. Nas duas progressões seguintes:

Por quociente: ∺ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256.

Por diferença: ÷ 0 : 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8.

os termos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 da progressão por diferença, são os logaritmos dos termos 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 e 256 da progressão por quociente.

Logaritmos comuns

375. Pode-se tomar duas progressões quaisquer para formar um sistema de logaritmos, mas escolhe-se de preferência a pro-

gressão por quociente na razão décupla, por ser a que mais vantagens oferece nos cálculos.

Este sistema de logaritmos denomina-se **Logaritmos comuns** ou vulgares, porque são estes os mais geralmente seguidos. Dá-se-lhe também o nome de **Logaritmos de Briggs,** porque foi êste matemático o primeiro que calculou uma tábua de logaritmos neste sistema.

Nota. Usa-se da abreviatura log. para exprimir logaritmo.

376. As progressões que foram adotadas para formar o sistema de logaritmos comuns ou de Briggs são as duas seguintes:

Por quociente: ÷ 0 : 1 : 2 : 3 : 4 : 5 . etc.
Por diferença: ÷÷ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : etc.

Nestas duas progressões, os termos 0, 1, 2, 3, 4 e 5 são os logaritmos de 1, 10, 100, 1000, 10000 e 100000.

377. Como os termos da progressão por quociente são todos potências de 10, e os termos correspondentes da progressão por diferença são os expoentes dessas potências, fica claro que o logaritmo de uma potência de 10 é o seu próprio expoente Assim

$10^0 = 1$, portanto, 0 é o log. de 1;
$10^1 = 10$, portanto, 1 é o log. de 10;
$10^2 = 100$, portanto, 2 é o log. de 100;
$10^3 = 1000$, portanto, 3 é o log. de 1000;
$10^4 = 10000$, portanto, 4 é o log. de 10000; etc. etc.

378. E' fácil ver que neste sistema de logaritmos só as potências de 10, isto é, só os números formados de 1 seguido de zeros, teem por logaritmo um número inteiro sem fração.

Todos os outros números teem por logaritmos um número misto ou fracionário que é avaliado por decimais. Assim o logaritmo de um número entre 1 e 10 deve achar-se entre 0 e 1, isto é, deve ser uma fração própria. Assim

O log. de 2 é 0,301030.

O logaritmo de um número entre 10 e 100 deve achar-se entre 1 e 2, isto é, deve ser 1 inteiro mais uma fração decimal. Assim

O log. de 50 é 1,698970.

O logaritmo de um número entre 100 e 1000 deve achar-se entre 2 e 3, isto é, deve ser 2 inteiros mais uma fração; e assim por diante.

Característica dos logaritmos

379. Os logaritmos dos números maiores do que 10 são compostos de duas partes, uma inteira e outra fracionária.

A parte inteira chama-se **característica** do logaritmo, e a parte fracionária, como é expressa em decimais, chama-se **decimal.**

No log. 3,547775, a parte inteira é 3, e por isto êste algarismo é a característica do logaritmo, e a parte decimal é 0,547775. A parte decimal é avaliada com um número de casas decimais que varia conforme a natureza do problema. Nos casos correntes, bastam 5 decimais.

380. Desde que o log. de 1 é 0; e o log. de 10 é 1; e o log. de 100 é 2; e o log. de 1000 é 3, e assim por diante, segue-se que

A característica do logaritmo de um número inteiro maior do que 1 contêm tantas unidades **menos uma,** *quantos algarismos tiver o número dado.*

A característica do log. de 134 é 2, porque tendo êste número 3 algarismos, e a característica tendo 1 menos, ficam 2.

A característica do log. de 2348 é 3, pois tendo êste número 4 algarismos, a característica do seu log. deve ser 3.

Se um número tiver um só algarismo, a característica do seu log. será zero.

Tábuas de logaritmos

381. Para fazermos a aplicação dos logaritmos nos diversos cálculos precisamos de uma tábua de logaritmos, afim de que, dado um número, se possa achar o seu logaritmo ou dado um logaritmo, se possa descobrir o seu número correspondente.

382. Algumas tábuas conteem os logaritmos de todos os números inteiros até 10000; outras os conteem até 100000. As tábuas trazem só a parte decimal dos logaritmos e suprimem a característica, por ser muito fácil calculá-la, como vimos acima.

Nota. Não expomos aquí o uso das tábuas de Callet nem o de outras ainda mais aperfeiçoadas, que ultimamente se teem publicado nos Estados-Unidos e na Inglaterra, porque entendemos que os discípulos, não tendo presentes essas tábuas, nenhuma exposição poderão compreender. Além disso, essas tábuas trazem sempre a explicação do modo de serem usadas. Se os discípulos mais tarde precisarem consultá-las, acharão nelas todos os esclarecimentos necessários para o seu uso.

Damos em seguida uma tábua de logaritmos de todos os números inteiros, desde 1 até 200, para podermos operar alguns cálculos sôbre esta matéria.

O uso desta tábua é facílimo: ao lado de cada número está o seu logarítmo completo.

Tábua de logaritmos dos números 1 até 200

Num.	Log.	Num.	Log.	Num.	Log.	Num.	Log.
1	0,000000	51	1,707570	101	2,004321	151	2,178977
2	0,301030	52	1,716003	102	2,008600	152	2,181844
3	0,477121	53	1,724276	103	2,012837	153	2,184691
4	0,602060	54	1,732394	104	2,017033	154	2,187521
5	0,698970	55	1,740363	105	2,021189	155	2,190332
6	0,778151	56	1,748188	106	2,025306	156	2,193125
7	0,845098	57	1,755075	107	2,029384	157	2,195900
8	0,903090	58	1,763428	108	2,033424	158	2,198657
9	0,954243	59	1,770852	109	2,037426	159	2,201397
10	1,000000	60	1,778151	110	2,041393	160	2,204120
11	1,041393	61	1,785330	111	2,045323	161	2,206826
12	1,079181	62	1,792392	112	2,049218	162	2,209515
13	1,113943	63	1,799341	113	2,053078	163	2,212188
14	1,146128	64	1,806180	114	2,056905	164	2,214844
15	1,176091	65	1,812913	115	2,060698	165	2,217484
16	1,204120	66	1,819544	116	2,064458	166	2,220108
17	1,230449	67	1,826075	117	2,068186	167	2,222716
18	1,255273	68	1,832509	118	2,071882	168	2,225309
19	1,278754	69	1,838849	119	2,075547	169	2,227887
20	1,301030	70	1,845098	120	2,079181	170	2,230449
21	1,322219	71	1,851258	121	2,082785	171	2,232996
22	1,342423	72	1,857332	122	2,086360	172	2,235528
23	1,361728	73	1,863323	123	2,089905	173	2,238046
24	1,380211	74	1,869232	124	2,093422	174	2,240649
25	1,397940	75	1,875061	125	2,096910	175	2,243038
26	1,414973	76	1,880814	126	2,100371	176	2,245513
27	1,431364	77	1,886491	127	2,103804	177	2,247973
28	1,447158	78	1,892095	128	2,107210	178	2,250420
29	1,462398	79	1,897627	129	2,110590	179	2,252853
30	1,477121	80	1,903090	130	2,113943	180	2,255273
31	1,491362	81	1,908485	131	2,117271	181	2,257679
32	1,505150	82	1,913814	132	2,120574	182	2,260071
33	1,518514	83	1,919078	133	2,123852	183	2,262451
34	1,531479	84	1,924279	134	2,127105	184	2,264818
35	1,544068	85	1,929419	135	2,130334	185	2,267172
36	1,556303	86	1,934498	136	2,133539	186	2,269513
37	1,568202	87	1,939519	137	2,136721	187	2,271842
38	1,579784	88	1,944483	138	2,139879	188	2,274158
39	1,591065	89	1,949390	139	2,143015	189	2,276462
40	1,602060	90	1,954243	140	2,146128	190	2,278754
41	1,612784	91	1,959041	141	2,149219	191	2,281033
42	1,623249	92	1,964788	142	2,152288	192	2,283301
43	1,633468	93	1,968183	143	2,155336	193	2,285557
44	1,643453	94	1,973128	144	2,158362	194	2,287802
45	1,653213	95	1,977724	145	2,161368	195	2,290035
46	1,662758	96	1,982271	146	2,164353	196	2,292256
47	1,672098	97	1,986772	417	2,167317	197	2,294466
48	1,681241	98	1,991226	148	2,170262	198	2,296665
49	1,690196	99	1,995635	149	2,173180	199	2,298853
50	1,698970	100	2,000000	150	2,176091	200	2,301030

Propriedades dos logaritmos

383. As propriedades principais dos logaritmos são as quatro seguintes que vamos expor:

A primeira reduz a multiplicação a uma simples adição.

A segunda reduz a divisão a uma simples subtração.

A terceira reduz a potenciação a uma só multiplicação.

A quarta reduz a extração de raízes a uma simples divisão.

Propriedade 1ª. *A soma dos logaritmos de dois ou mais números é igual ao logaritmo do produto dêsses números.*

Para demonstrar que o logaritmo da soma de dois ou mais fatores é igual ao logaritmo do produto dêsses fatores, bastarão os dois exemplos seguintes:

Problema. Achar por meio de logaritmos o produto de 12 multiplicado por 11.

Solução. Procurando na tábua os logaritmos de 12 e 11, achamos 1,079181 e 1,041393. Somando os dois logaritmos, temos 2,120574. Procurando agora na tábua o número correspondente a este logaritmo, achamos o número 132, que é o produto de 12 × 11.

Processo

Log. de 11 = 1,041393
Log. de 12 = 1,079181
Log. de 132 = 2,120574

Problema. Qual é o produto de 13 multiplicado por 14.

Solução. A soma dos logaritmos de 13 e 14 é 2,260071, e o número correspondente a êste logaritmo é 182, e que é produto de 13 × 14. Daquí poderemos formular a seguinte regra.

Processo

Log. de 13 = 1,113943
Log. de 14 = 1,146128
Log. de 182 = 2,260071

Regra. *Para se multiplicarem dois ou mais números, adicionam-se os seus logaritmos, e a soma será o logaritmo do produto dêsses números.*

Achar por meio de logaritmos os seguintes produtos:

1. Qual é o produto de 7 multiplicado por 18? Resp. ?
2. Qual é o produto de 5 × 9 × 4 ? » ?
3. Qual é o produto de 5 × 5 × 5 ? » ?

Propriedade 2ª. *O logaritmo do dividendo menos o logaritmo do divisor é igual ao logaritmo do quociente.*

Esta propriedade pode ser fàcilmente demonstrada pelo seguinte exemplo:

Problema. Dividir 63 por 9, por meio de logaritmos.

Solução. Subtraindo o logaritmo do divisor do logaritmo do dividendo, o resto é 0,845098. Procurando agora na tábua o número correspondente a êste logaritmo, achamos 7, que é o quociente de 63 dividido por 9. Portanto

Processo

Log. de 63 = 1,799341
Log. de 9 = 0,954243
Log. de 7 = 0,845098

Regra. *Para se dividir um número por outro, por meio de logaritmos, subtrai-se do logaritmo do dividendo o logaritmo do divisor, e o resto será o logaritmo do quociente.*

Achar por meio de logaritmos:

1. O quociente de 85 dividido por 17. Resp. ?
2. O quociente de 145 dividido por 29. " ?
3. O quociente de 198 dividido por 66. " ?

Propriedade 3ª. *Multiplicando o logaritmo de um número por qualquer expoente, o produto será o logaritmo da potência daquele número indicada pelo expoente.*

Segundo esta propriedade, para elevarmos um número a uma potência alta, não precisamos fazer muitas operações de multiplicar; bastará achar o logaritmo do número dado, e multiplicá-lo pelo expoente da potência requerida. Este ponto fica demonstrado com o seguinte exemplo:

Problema. Achar a terceira potência de 4.

Solução. O logaritmo de 4 é 0,602060, e o expoente da 3ª potencia é 3. Multiplicando êste logaritmo por 3, temos o log. 1,806180. Procurando na tábua o número correspondente a êste logaritmo, achamos 64, que é a terceira potência de 4. Prova: 4 × 4 × 4 = 64.

Processo

Log. de 4 = 0,602060
3
Log. de 64 = 1,806180

Regra. *Para se elevar um número a uma potência qualquer, por meio de logaritmos, multiplica-se o logaritmo do número dado pelo expoente da potência; o produto será o logaritmo da potência.*

Achar o logaritmo das seguintes potências:

1. O quadrado de 13. Resp. ?
2. Elevar 2 à sétima potência. " ?
3. Achar a terceira potência de 5. " ?

Propriedade 4ª. *Dividindo o logaritmo de um número pelo índice de uma raiz, o quociente será o logaritmo dessa raiz.*

Segundo esta propriedade, para se achar qualquer raiz de um número, bastará dividir o logaritmo do número dado pelo índice da raiz, e estará concluída a operação.

Problema. Achar a raiz cúbica de 125.

Solução. O log. de 125 é 2,096910, e o índice da raiz cúbica é 3.
Dividindo êste logaritmo por 3, temos 0,698970. Procurando na tábua o número correspondente a êste logaritmo, achamos o número 5, que é a raiz cúbica de 125. Então $\sqrt[3]{125} = 5$.

Processo

$2,096910 \div 3 = 0,698970$

Log. de 5 = 0,698970

Regra. *Para se extrair qualquer raiz de um número por meio de logaritmos, divide-se o logaritmo do número dado pelo índice da raiz requerida; o quociente será o logaritmo da raiz.*

Achar o logaritmo das seguintes raízes:

1. A raiz quadrada de 144. Resp. ?
2. Achar a sétima raiz de 128. " ?
3. Achar a quarta raiz de 81. " ?

Nota. Ainda que pela exposição destas quatro propriedades dos logaritmos possamos notar a sua vantagem nas operações, não é contudo na Aritmética que podemos apreciar todo o seu grande valor e utilidade. Nos cálculos de Trigonometria, Astronomia e Geodésia, etc., é que podemos devidamente avaliar a utilidade dos logaritmos nas ciências matemáticas.

Achar os logaritmos de outros números multiplos além dos que se acham na tábua anexa

384. Como a soma dos logaritmos de dois ou mais números é igual ao logaritmo do produto dêsses números (Propriedade 1ª), segue-se que, conhecidos os logaritmos de 2, 3, 5, 7 e 11, podemos achar fàcilmente os logaritmos.

de 6, que é o produto de 2×3;
de 10, " " " " 2×5;
de 14, " " " " 2×7;
de 18, " " " " 3×6;
de 24, " " " " 4×6; etc.

Conhecidos os logaritmos de 10, 18 e 24, podemos achar também fàcilmente o log. de 240, que é o produto de 10×24, o log. de 432, que é o produto de 18×24, e assim por diante.

Problema. Qual é o logaritmo de 222?

Solução. O número 222 pode ser decomposto nos fatores 111 e 2. Como estes dois números se acham na tábua anexa, procuram-se os seus logaritmos, somam-se e tem-se 2,346353, que é o logaritmo de 111 × 2 ou 222.

Se decompusermos o número 222 nos fatores 37 e 6, ou em outros o resultado será o mesmo.

Processo

Log. de 111 = 2,045323
Log. de 2 = 0,301030
Log. de 222 = 2,346353

Regra. *Para se achar o logaritmo de um número múltiplo, superior a 200, decompõe-se o número dado em dois ou mais fatores contidos na tábua anexa, e a soma dos logaritmos dêsses fatores será o logaritmo do número dado.*

385. Se um número fôr multiplicado por 10, 100, 1000, etc., o logaritmo do produto ficará na parte decimal igual ao logaritmo dêsse número, e só a característica aumentará na razão do número de zeros do multiplicador, como fica exposto no n.º **380.**

Assim o log. de 3 é 0,477121;
o log. de 30 é 1,477121;
o log. de 300 é 2,477121;

De sorte que, para acharmos, por exemplo, o log. de 400, bastará juntar a característica 2 ao log. de 4, que é 0,602060, e ficará 2,602060.

1. Qual é o log. de 201?	(67 × 3)	Resp. 2,303196
2. Qual é o log. de 250?	(50 × 5)	" 2,397940
3. Qual é o log. de 404?	(101 × 4)	" 2,606381
4. Qual é o log. de 500?		" 2,698970
5. Qual é o log. de 700?		" 2,845098
6. Qual é o log. de 840?		" 2,924279
7. Qual é o log. de 999?		" 2,999566
8. Qual é o log. de 1001?		" 3,000434

Achar o logaritmo de um número fracionário

386. Um só exemplo é suficiente para mostrar o modo de achar o logaritmo de um número fracionario.

Problema. Qual é o logaritmo de $4\frac{5}{7}$?

Solução. O número $4\frac{5}{7}$ reduzido a uma fração imprópria, fica $\frac{33}{7}$ cuja expressão significa que 33 se tem de dividir por 7. Ora, o que na Aritmética se faz pela divisão, em logarítimos se faz pela subtração. (Propriedade 2.ª) Portanto subtraindo do log. de 33 o log. de 7, resta 0,673416, que é o log. de $4\frac{5}{7}$.

$4\frac{5}{7} = \frac{33}{7}$

Log. de 33 = 1,518514
Log. de 7 = 0,845098
Log. de $\frac{33}{7}$ = 0,673416

Regra. *Para se achar o logaritmo de um número fracionário reduz-se êsse número a uma fração imprópria, e subtrai-se do log. do númerador o log. do denominador, e o resto será o log. do número fracionário.*

1. Qual o log. de $2\frac{1}{2}$? Resp. 0,397940
2. Qual o log. de $6\frac{1}{4}$? " 0,795880
3. Qual o log. de $12\frac{3}{5}$? " 1,100371

Achar o logaritmo de uma fração

387. Tomando-se as duas progressões que constituem o sistema comum de logaritmos, e dispondo-as na ordem decrescente, começando pela unidade, temos

$$\div\ 1 : 0{,}1 : 0{,}01 : 0{,}001 : 0{,}0001, \text{ etc.}$$
$$\div\ 0 : -1 : -2 : -3 : -4, \text{ etc.}$$

Nestas duas progressões vemos que

o log. de 0,1 é — 1;
o log. de 0,01 é — 2;
o log. de 0,001 é — 3;
o log. de 0,0001 é — 4; etc.

O sinal — (menos) anteposto aos logaritmos **1, 2, 3 e 4,** indica que êsses números são negativos, isto é, devem ser considerados como menos do que zero, e leem-se do seguinte modo: *— 1, menos um; — 2, menos dois; — 3, menos três*, etc.

Desde que o log. de 0,1 é — 1; o log. de 0,01 é — 2; o log. de 0,001 é — 3, etc., segue-se que o logaritmo de uma fração entre um inteiro e um decimo deve ser — 1 mais uma fração; o logaritmo de uma fração entre um décimo e um centésimo deve ser — 2 mais uma fração; o logaritmo de uma fração entre um centésimo e um milésimo deve ser — 3 mais uma fração, e assim por diante. De sorte que,

o log. de 0,7 é — 1 + 0,845098;
o log. de 0,03 é — 2 + 0,477121;
o log. de 0,004 é — 3 + 0,602060.

388. Como a característica do logaritmo de uma fração anda sempre acompanhada do sinal negativo —, dá-se-lhe por isso o nome de **característica negativa** para distinguí-la da característica dos logaritmos dos números inteiros.

Na prática escreve-se o sinal — sôbre a característica negativa, para mostrar que só esta parte do logaritmo é negativa, e a seguir, a parte decimal. Assim

$\bar{1},845098$ quer dizer $-1 + 0,845098$.
$\bar{2},477121$ " " $-2 + 0,477121$;
$\bar{3},602060$ " " $-3 + 0,602060$; etc.

A caracteristica do log. de uma fração decimal é um número negativo, e tem tantas unidades quantos forem os zeros à esquerda inclusive o que antecede a virgula.

Ilustração. Para esta proposição ficar bem inteligível, vamos ilustrá-la com os seguintes exemplos:

A característica do log. de 0,05 é — 2, porque são dois os zeros à esquerda; a característica do log. 0,0040 é — 3, porque são três os zeros à esquerda. Os zeros que veem depois dos algarismos significativos não são considerados, como fizemos no segundo exemplo.

Quando depois da vírgula decimal não há zéro algum e segue logo um algarismo significativo, a característica do log. é sempre — 1.

Problema. Qual é o logaritmo de 0,25?

Solução. Acha-se primeiro a característica do log. de 0,25. A característica é — 1. Procurando-se depois na tábua a parte decimal do log. de **25**, acha-se 397940. Então o log. de 0,25 é $-1 + 0,39794\$$ ou $\bar{1},397940$.

O log. de 0,25 é $\bar{1},397940$

A característica é — 1

Problema. Qual é o logaritmo de 0,04?

Solução. A característica do log. 0,04 é—2; ajuntando-lhe agora a parte decimal do log. de 4, ficará $-2 + 0,602060$ ou $\bar{2},602060$.

O log. de 0,02 é $\bar{2},602060$

Regra. *Para se achar o logaritmo de uma fração decimal, acha-se primeiro a caracteristica do logaritmo, e junta-se-lhe a parte decimal do logaritmo do número que se obtem abstraindo-se da virgula.*

Nota. Quando a fração é ordinária, reduz-se a uma fração decimal.

1. Qual é o iog. de 0,15? — Resp. $\bar{1},176091$
2. Qual é o log. de 0,008? — " $\bar{3},903090$
3. Qual é o log. de $\frac{3}{4}$? — " $\bar{1},875061$
4. Qual é o log. de 0,125? — " $\bar{1},096910$
5. Qual é o log. de $\frac{7}{28}$? — " $\bar{1},397940$

Nota. Muitos outros esclarecimentos poderíamos ainda dar sôbre os logaritmos, mas deixamos d eos expôr, porque o desenvolvimento desta matéria já não pertence mais à Aritmética, mas entra no alto domínio da Algebra.

MEDIÇÃO

389. Medição é a parte da Aritmética que ensina a achar a área das superfícies planas e o volume dos sólidos por meio de cálculos feitos sôbre as suas dimensões.

Nota. Daremos aquí simplesmente a instrução necessária para os discípulos poderem avaliar a grandeza de algumas superfícies planas e de alguns sólidos. São, porém, indispensáveis algumas definições geométricas, porque a medição se baseia em princípios conhecidos de Geometria, e o discípulo deve conhecer os termos técnicos desta ciência, que teem referência com a medição.

390. Grandeza é tudo que tem uma ou mais das três dimensões: *comprimento, largura e altura.*

Linha

Linha é a grandeza que tem comprimento, mas não tem largura.

Superfície é a grandeza que tem comprimento e largura, como: campos, páteos, jardins, lagos, salas, etc. A figura ao lado representa uma superfície quadrada. A medida da superfície chama-se **área.**

Superfície

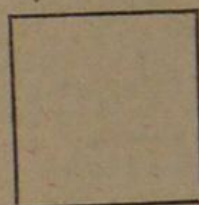
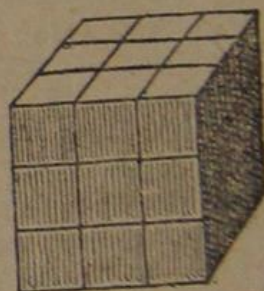
Sólido é a grandeza que tem as três dimensões: comprimento, largura e altura, como caixões, fardos, muros, madeiras, etc.

Sólido

Ilustração. As três dimensões: comprimento, largura e altura, são tomadas segundo a natureza da medição.

Se quisermos saber qual é o tamanho de uma peça de fita ou a extensão de uma linha telegráfica, mediremos o comprimento da fita, ou a extensão da linha telegráfica, e teremos uma idéia perfeita do tamanho da fita ou da extensão da linha.

Se, porém, quisermos saber o tamanho de um campo, de um jardim ou de qualquer superfície plana, teremos de medir o seu comprimento e a sua largura, porque só a medida do comprimento não nos daria idéia alguma do tamanho do campo, visto êle poder ser ou muito largo ou muito estreito.

Para medirmos o tamanho de qualquer sólido, como, por exemplo, um fardo de algodão, temos de medir o seu comprimento, a sua largura e a sua altura, porque só o comprimento e a largura não nos dariam idéia do volume, visto êle poder ser ou muito alto ou muito baixo.

Definições

391. Linha reta é a que mede a distância mais curta entre dois pontos.

Linha reta

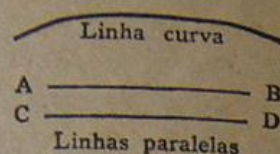
Linha curva é a que não é reta, nem formada de retas.

Linha curva

A ——— B
C ——— D
Linhas paralelas

Retas paralelas são as que conservam sempre entre si igual distância.

Linha poligonal ou *quebrada* é a que é formada de porções de reta. Cada porção de reta é um *lado* da linha quebrada,

Nota. Nas figuras geométricas escrevem-se letras para se distinguirem umas das outras. Assim, as duas linhas paralelas traçadas acima: a **primeira** chama-se **AB** e a segunda chama-se **CD**.

392. Uma linha reta, segundo a sua direção, toma o nome de vertical, horizontal ou inclinada.

Vertical é a direção do fio a prumo.

Horizontal é a direção paralela à superfície da água tranquila.

Inclinada é a que não é vertical nem horizontal.

Nota. Como as linhas só teem comprimento, segue-se que somar duas ou mais linhas é reunir os seus comprimentos em um só. Se uma linha tem 20 centímetros, outra tem 15, as três linhas somam 20 + 15 + 25 = 60 centímetros.

Angulos

393. Angulo é a figura formada por duas retas que partem do mesmo ponto. Um compasso aberto dá-nos exemplo de ângulo.

As duas retas chamam-se lados do ângulo; o ponto da união chama-se **vértice** do ângulo. O espaço entre as duas linhas abertas chama-se abertura do ângulo. Assim a fig. 1.ª é um ângulo. as linhas **AB** e **BC** são os lados do ângulo; o ponto **B** é o vértice, e o espaço entre **AB** e **BC** é a abertura.

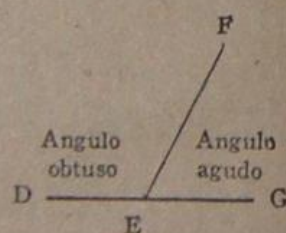
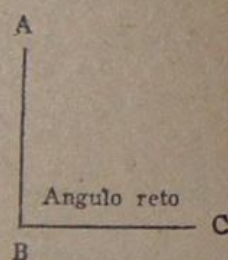
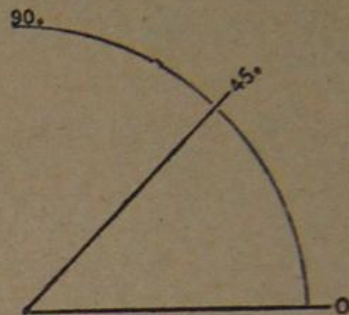
Os ângulos, segundo a sua maior ou menor abertura, denominam-se: retos, agudos ou obtusos.

394. Quando duas retas se cortam formando angulos iguais, elas se dizem perpendiculares. Esses angulos são *angulos retos*. Si duas retas, se encontram formando angulos desiguais um é maior, outro é menor do que o reto. Neste caso, as retas se dizem *obliquas*; o ângulo menor do que o reto é chamado *agudo* e o maior, *obtuso*.

Ilustração. A grandeza de um ângulo não está no comprimento dos seus lados, mas sim na sua maior ou menor abertura, a qual é medida pelo arco do círculo, que vai de um lado a outro. O tamanho de um ângulo é avaliado nesse arco em graus, minutos e segundos.

Como já ficou explicado atrás a circunferência de um círculo divide-se em 360 graus; cada grau divide-se em 60 minutos, e cada minuto em 60 segundos. O semi-círculo, que é a metade do círculo, tem 180 graus.

Na figura ao lado, vemos um quadrante, isto é, a quarta parte do círculo, e que mede 90°. O ângulo aí traçado mede 45°.

Polígonos

395. A figura formada por uma linha quebrada fechada chama-se **polígono.**

Um polígono tem tantos ângulos quantos são os seus lados. Se um polígono tem três lados, chama-se triângulo, se tem quatro, chama-se quadrilátero.

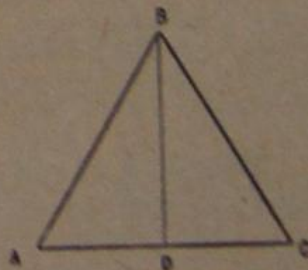
396. Se um polígono tem todos os seus lados iguais e ângulos também iguais, chama-se **polígono regular.** O nome de cada polígono mostra o número de seus lados. Assim

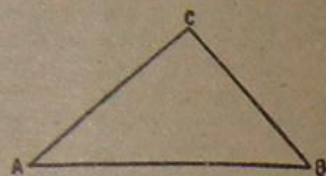
Pentágono é um polígono de 5 lados.
Hexágono é um polígono de 6 lados.
Heptágono é um polígono de 7 lados.
Octógono é um polígono de 8 lados.
Eneágono é um polígono de 9 lados.
Decágono é um polígono de 10 lados.

Perímetro de um polígono é o seu contôrno e compreende a soma de todos os seus lados.

Triângulos

397. Triângulo é o polígono de três lados.

Se o triângulo tem os três lados iguais chama-se triângulo **equilátero;** se tem só dois lados iguais, chama-se triângulo **isósceles;** se tem os três lados desiguais, chama-se triângulo **escaleno.**

Neste triângulo, a linha **AC** é a base do triângulo; a perpendicular **BD** é a altura, e as linhas **AB** e **BC** são os lados do triângulo.

398. Se um triângulo tem um ângulo reto, chama-se **triângulo retângulo;** o lado oposto ao ângulo reto chama-se **hipotenusa,** e os outros lados são os **catetos.** Assim, no triângulo **ABC** a hipotenusa é **AB;** os lados **AC** e **BC** são os catetos.

Quadriláteros

399. Quadrilátero é o polígono de quatro lados. Os quadriláteros podem ter diversas formas.

Quadrado é um quadrilátero que tem os lados iguais e ângulos retos.

Quadrado

Retângulo é um quadrilátero que tem quatro ângulos retos, e os lados iguais dois a dois.

Retangulo

Rombo é um quadrilátero que tem os lados iguais, mas não tem ângulos retos; os ângulos são iguais dois a dois, sendo dois agudos e dois obtusos.

Rombo

Paralelogramo é um quadrilátero que tem os seus lados paralelos dois a dois.

Paralelogramo

Nota. Um paralelogramo é uma figura que tem os lados opostos paralelos; ora, como o quadrado, o rombo e o retângulo teem os lados opostos paralelos, segue-se que também estas figuras são paralelogramos, mas com a seguinte distinção:

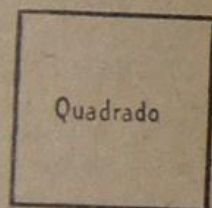
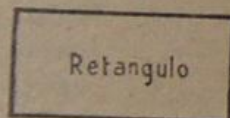
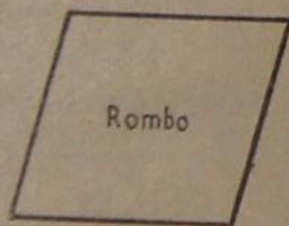
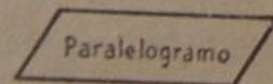
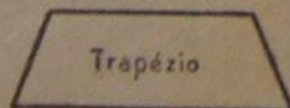
Se o paralelogramo tem os quatro lados iguais e os ângulos retos, chama-se **quadrado.**

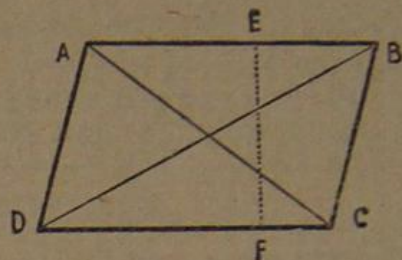
Se o paralelogramo tem os quatro lados iguais, mas não tem ângulos retos, chama-se **rombo.**

Se o paralelogramo tem ângulos retos, mas não tem os lados iguais, chama-se **retângulo.**

Trapézio é um quadrilátero que tem só dois lados paralelos.

Trapézio

Nota. Em um trapézio os lados paralelos são sempre desiguais, e os lados não paralelos podem ser iguais ou desiguais.

O trapézio tem duas bases, que são os dois lados paralelos. A altura do trapézio é a perpendicular que toca nas duas bases.

400. Diagonal é reta que une dois vertices não consecutivos do polígono; assim as linhas **AC** e **DB** são as diagonais do paralelogramo **ABCD.**

Medição das superfícies

401. Area é a medida de uma superfície.

Entende-se por area de um jardim a medida do terreno compreendido dentro dos muros ou gradil dêsse jardim.

Para calcularmos a grandeza de uma superficie, temos primeiro de medir o seu comprimento e a sua largura.

Ilustração. Já sabemos que a unidade de superfície é o metro quadrado e já estudámos os seus múltiplos e submúltiplos. Mas não se calcula uma área aplicando diretamente sôbre a superfície as unidades convencionadas. A área é calculada indiretamente combinando certas dimensões da figura. Para tomar estas dimensões usam-se, conforme o caso, um metro ou uma trena, corda ou corrente estendida sôbre o chão ou em altura que se obtenha uma medida exata.

Trena é uma fita de linho, fixa a um eixo de uma caixinha redonda de couro, onde ela se enrola.

Todo o seu comprimento, que varia desde 5 metros até 50, tem traços graduados que marcam, de um lado metros divididos em centimetros, e do outro marcam polegadas inglesas.

402. Para as grandes superfícies de campos, matas ou qualquer terreno de cultura, já vimos que a unidade empregada é o *are* equivalente ao decâmetro quadrado.

Achar a área dos quadriláteros

403. Quando um terreno é plano, e limitado somente por linhas retas, podemos facilmente calcular com toda a precisão a sua área.

404. Suponhamos para começar, que a forma é retangular. As duas dimensões diferentes do retângulo chamam-se *comprimento* e *largura*. Seja o comprimento igual a 9 cm. e a largura 5cm. A figura ao lado mostra que a superfície pode ser decom-

posta em $9 \times 5 = 45$ quadrados com 1 cm. de lado ou 45 cm^2. Está é a área do retângulo.

Si os lados do retângulo fossem 9m. e 5m., então, cada quadrado teria 1m. de lado, isto é, seria $1m^2$. e a área do retângulo seria $45m^2$.

Regra. *Para acharmos a área de um retângulo, multiplicaremos, o seu comprimento pela sua largura; o produto será a área.*

405. O quadrado é um caso particular do retângulo em que o comprimento se torna igual à largura. Então, temos de multiplicar o lado do quadrado por si mesmo. Assim, se o lado do quadrado fôr 6m, a área será 6×6 ou $36m^2$.

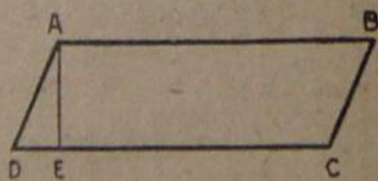
Regra. *Obtém-se a área do quadrado fazendo o quadrado do lado.*

1. Qual é a superfície de um largo retangular que tem 35 metros de comprimento, e 22 de largura Resp. 770 m^2.
2. Qual é a área de um armazem que tem 17 m,5 de comprimento, e 8m, 4 de largura? Resp. 147 m^2.
3. Quantos metros quadrados tem um jardim que mede 90 metros de comprimento, e 80 de largo? Resp. ?

406. Para acharmos a superfície de um paralelogramo, temos de tomar o seu comprimento, que aquí chamaremos *base*, e a sua largura, que aqui chamaremos *altura*.

Problema. Qual é a superfície de um paralelogramo, que tem 15 metros de base, e 8 metros de altura?

Solução. A base é a linha DC, que tem 15 metros; a altura é a linha AE que tem 8 metros; então a área do paralelogramo tem $15 \times 8 = 128$ metros quadrados.

Demonstração. Se cortassemos desta figura o triângulo ADE, e o juntássemos à linha BC, a figura se tornaria um retângulo, sendo AB o comprimento e AE a largura. Ora, para se achar a área de um retângulo, multiplica-se o seu comprimento (base) pela sua largura (altura), como demonstrámos na secção antecedente.

Regra. *Para se achar a área de um paralelogramo, multiplica-se a base pela altura.*

1. Qual é a área de um paralelogramo que tem 125m, metros de base, e 85m de altura? Resp. ?

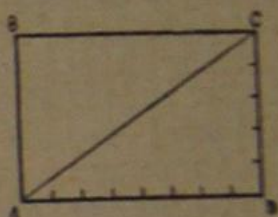
2. Qual é a área de um rombo que tem 25m, 5, de base, e 15m, 5 de altura? Resp. ?

3. Achar a área de um paralelogramo que tem 8m, 25 de base, e 9m, 15 de altura? Resp. ?

Achar a área dos triângulos

407. Problema. Qual é a área de um triângulo que mede 8 metros de base e 5 metros de altura?

Solução. No triângulo **ACD**, a base é **AD** que mede 8 metros, e a altura é **CD** que mede 5 metros.

Multiplicando a base pela altura e dividindo o produto por 2 temos $\frac{8 \times 5}{2} = 20m^2$, o que é a área do triângulo.

Demonstração. Na figura **ABCD** temos um retângulo que tem 8 metros de comprimento e 5 de largura, e por isso tem $8 \times 5 = 40$ metros quadrados. Por uma simples inspeção, vemos que o triângulo ocupa justamente a metade da área do retângulo; logo deve conter a metade de 40 metros quadrados, que são 20 metros quadrados.

Regra. *Para se achar a área de um triângulo, multiplica-se a base pela altura e divide-se o produto por 2.*

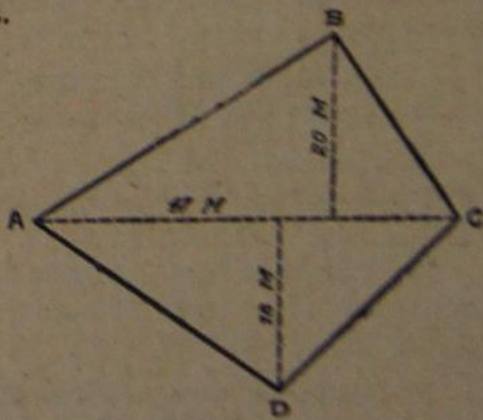
1. Um triângulo mede 30 metros de altura e 10 de base. qual é a área do triângulo? Resp. 150 metros quadrados.

2. Qual é a área de um triângulo que tem 15 centímetros de base e 12 de altura? Resp. 90 centímetros quadrados.

3. Qual é a área de um triângulo que tem 0m, 16 de base e 0m, 30 de altura? Resp. 240 centímetros quadrados.

408. Quando um terreno tem todos os seus lados desiguais, calcula-se facilmente a sua área, decompondo-o em triângulos e somando depois as áreas dêstes.

Ilustração. Na figura **ABCD** que está à margem, temos um terreno muito irregular, mas que podemos medir fàcilmente com toda a precisão.

Se nesta figura tirarmos a diagonal **AC**, formaremos os dois triângulos **ABC** e **ADC**. Medindo a linha **AC**, que é a base dos dois triângulos, achamos 47 metros. Medindo também a altura do triângulo **ABC**, achamos 20 metros. Multiplicando agora a base pela altura e dividindo por 2, temos 470 metros quadrados, que é a área do primeiro triângulo.

Medindo agora a altura do segundo triângulo, achamos 18 metros. Multiplicando também a base pela altura e dividindo por 2, temos 423 metros quadrados, que é a área do segundo triângulo. Somando as duas áreas, temos 470 + 423 = 893 metros quadrados, que é a área exata da figura ou do terreno aquí representado.

Aplicação do are na medição de campos e terrenos de cultura

409. Como já sabemos achar em metros quadrados a área de qualquer polígono, podemos sem dificuldade alguma, achar o número de ares ou hectares que tem qualquer terreno ou plantação, quando a superfície fôr plana. Obtemos a área do terreno expressa em metros quadrados; ora, como o are tem 100 metros quadrados, segue-se que, se dividirmos o número de metros quadrados que tiver o terreno por 100, teremos o número de ares; e dividindo o número de ares por 100, teremos o número de hectares, porque o hectare tem 100 ares. Assim o terreno que tem 60000 metros quadrados tem 600 ares ou 6 hectares.

Problema. Quantos ares tem uma roça retangular que tem 200 metros de comprimento, e 150 de largura?

Solução. A roça tem 200 metros de comprimento, e 150 de largura; então tem 150 × 200 = 30000 metros quadrados; e como o are tem 100 metros quadrados, dividiremos 30000 por 100, e teremos 300 ares, que é quanto tem a roça.

Regra. *Para se reduzirem metros quadrados a ares, divide-se o número de metros por 100; e para se reduzirem ares a hectares, divide-se o número de ares por 100.*

Nota. Esta divisão póde ser operada só com a vírgula, separando dois algarismos, para reduzir metros quadrados a ares, e separando quatro, para reduzir metros quadrados a hectares.

1. Quantos ares tem uma mata retangular de 168 metros de largura, e 242 de comprimento? Resp. 406,56 a

2. Quantos hectares tem uma fazenda de forma retangular que mede 1,600 km. de largura e 2,500 km. de comprimento? Resp. 400 hectares.

3. Contratei uma plantação de milho à razão de $500 cada are; ora tendo a roça 450 m. de comprimento, e 80 de largura, quanto tive de pagar? Resp. 180$000.

4. Quantos ares contém um triângulo que mede 250 metros de base, e 160 de altura? Resp. 200a.

5. A grande pirâmide do Egito tem uma base quadrada que mede 211 metros de lado; quantos ares ocupa ela?
Resp. 445,21 a.

6. Um triângulo tem 84 metros de base, e 50 metros de altura. Quantos ares tem o triângulo? Resp. 21 a.

Nota. O are foi adotado por lei no Brazil, mas na prática entre fazendeiros e outros lavradores, prevalece o antigo sistema de medir fazendas, matas, terrenos e plantações por alqueires de terra.

O alqueire de terra é o espaço necessário para plantar um alqueire de milho, e varia de tamanho, conforme o modo de plantar o milho. Em S. Paulo, o alqueire de terra tem 5000 braças quadradas, isto é, 100 braças de comprimento e 50 de largura. Em algumas partes de Minas, o alqueire tem 7200 braças quadradas e em outros lugares tem até 10000 braças quadradas.

Quadrado da hipotenusa

410. Já vimos no n.º **398** que em um triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto chama-se **hipotenusa.**

411. E' princípio conhecido e demonstrado em Geometria que:

O quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados.

Ilustrações demonstrativas. Na primeira figura que está ao lado, temos o triângulo retângulo **ABC. AC** é a hipotenusa, porque é o lado oposto ao ângulo reto, **AB** é um cateto, e **BC** o outro. Como a hipotenusa mede 5 polegadas de comprimento o seu quadrado é $5 \times 5 = 25$ polegadas quadradas. **AB**, tendo 4 polegadas, o seu quadrado é $4 \times 4 = 16$ polegadas quadradas. Finalmente **BC**, tendo 3 polegadas, o seu quadrado é $3 \times 3 = 9$ polegadas quadradas.

Ora o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, porque $16 + 9 = 25$, isto é, 16 polegadas quadradas mais 9 são 25 polegadas quadradas, que é o quadrado da hipotenusa.

Na segunda figura vemos os mesmos três quadrados, mas

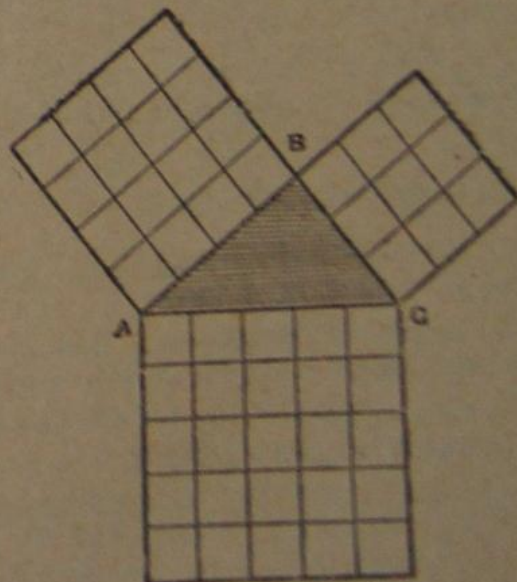
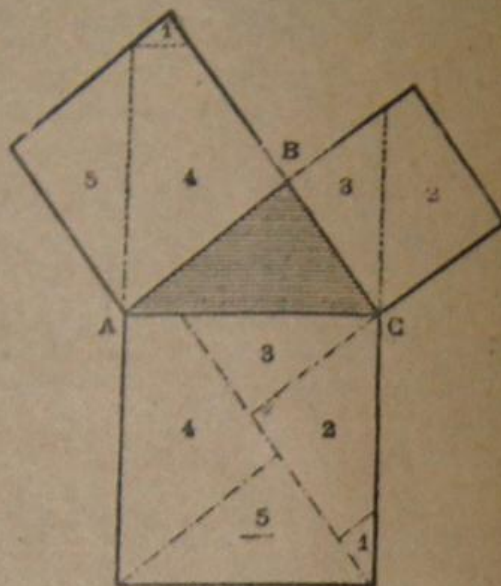



Fig. 1ª

divididos por outra forma. O quadrado de **AB** está dividido em três partes desiguais que são 1, 5 e 4; o quadrado de **BC** está dividido em duas partes, que são 3 e 2. Ora essas cinco partes se acham exatamente contidas no quadrado de **AC**, por onde fica provado que a superfície do quadrado da hipotenusa é igual à soma das superfícies dos outros dois quadrados.

Fig. 2ª

Se desenharmos uma figura semelhante à Fig. 2.ª, dando-lhe qualquer dimensão, e se depois a dobrarmos em **AC** sôbre o quadrado da hipotenusa, bem como as outras pontas de modo que só apareça distintamente o quadrado da hipotenusa, quando desdobrarmos o papel, as dobras mostrarão as cinco partes em que os dois quadrados pequenos estão divididos.

Cortam-se estas cincos partes pelas suas dobras, colocam-se sôbre o quadrado da hipotenusa, e elas cobrirão exatamente toda a sua superfície, como se vê na figura 2.ª.

412. Do que ficou exposto, podemos deduzir as seguintes regras:

Regra. *I. Para se achar o comprimento da hipotenusa, somam-se os quadrados dos outros dois lados, e extrai-se a raiz quadrada da soma.*

II. Para se achar um cateto, extrai-se a raiz quadrada da diferença entre o quadrado da hipotenusa e o quadrado do outro cateto.

Problemas para resolver:

1. Qual é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos têm 18 e 24 metros?
Resp. 30.

2. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 135 metros e um cateto 81; qual é o outro cateto? Resp. 108.

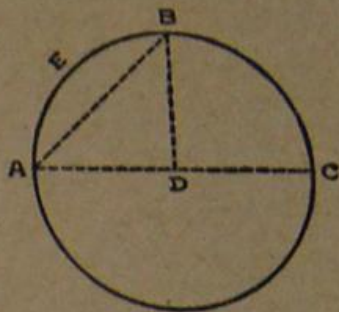
3. Um cateto mede 4 ½ palmos e a hipotenusa 7 ½; quanto mede o outro cateto? Resp. 6 palmos.

4. Uma árvore que tem 40 metros de altura está à margem de um rio; do ponto mais alto da árvore sai uma corda que chega até o outro lado do rio; e mede 50 metros; qual é a largura do rio?
Resp. 30 metros.

Teoria do círculo

413. Circulo é a porção do plano limitada pela circunferência.

Circunferência é a linha curva que tem todos os seus pontos igualmente distantes do ponto interior chamado **centro.**

Diâmetro é a reta que, passando pelo centro do circulo o divide em duas partes iguais chamadas semicírculos, como a linha **AC.**

Raios do círculo são as linhas retas traçadas do centro à circunferência, como as linhas **DB, DC** e **DA.** O raio é igual à metade do diâmetro.

Arco é qualquer parte da circunferência, como a linha **AB** ou a linha **AEB.**

Corda é a reta que os dois extremos do arco, como a reta **AB.**

Segmento é a parte do circulo compreendida entre o arco e a sua corda, como a figura **ABE.**

Sector é a parte do círculo compreendida entre um arco e dois raios, como **BCD.**

Relação entre a circunferência e o diâmetro

414. Se compararmos o diâmetro de um círculo com a sua circunferência, acharemos que o diâmetro não estará contido um exato número de vezes na circunferência, pois se o comprimento do diâmetro fôr 1, o da circunferência será 3,141592..., isto é, será 3 inteiros e uma parte decimal que, por mais algarismos que lhe adicionemos, nunca poderá exprimir a relação exata da circunferência.

Não podemos pois obter exatamente a área do círculo, como obtemos rigorosamente a do quadrado, ou qualquer outro polígono regular. Achar, pois, um quadrado que tenha rigorosamente a mesma área de um círculo dado, é o que constitue o célebre problema da **quadratura do círculo.**

Nota. Arquimedes foi o primeiro geômetra que fixou a relação aproximada entre a circunferência e o diâmetro na razão de 22 para 7, isto é, tendo o diâmetro 7 palmos, a circunferência deve ter 22.

Mais tarde, Adriano Metius achou outra relação mais aproximada, na razão de 355 para 113, isto é, o diâmetro tendo 113 palmos, a circunferência deve ter 355. Esta relação é fácil de conservar na memória, porque se escrevem os três primeiros algarismos ímpares em duplicata (113355); dividem-se com a vírgula em duas classes (113,355), a primeira será o diâmetro e a segunda, a circunferência.

Outros geômetras acharam, depois de Metius, que a relação mais aproximada entre o diâmetro e a circunferência é a de 1 para 3,14159265. Para facilitar as operações, escreve-se este número só com 4 algarismos decimais, elevando o último de 5 a 6, ficando o número 3,1416. Se o diâmetro pois, tiver um metro, a circunferência terá 3 metros e 1416 décimos-milésimos de um metro.

415. Desta exposição estabelecemos a seguinte regra:

Regra. *Para se achar* **a circunferência,** *multiplica-se o diâmetro por 3,1416.*

E para se achar **o diâmetro,** *divide-se a circunferência por 3,1416.*

1. Qual é o diâmetro de um círculo cujo circunferência tem 150 metros? Resp. 47m,746.
2. Tendo um círculo 100 metros de circunferência, qual é o seu diâmetro? Resp. 31m,830.
3. O diâmetro de uma roda mede 25 centímetros. qual é a sua circunferência? Resp. 78cm,54.
4. Qual é a circunferência de um círculo, que tem 32,5m, de raio? Resp. 204m,204.

Achar a área de um círculo

416. A Geometria oferece-nos as seguintes regras para acharmos a área de um círculo, conhecendo o raio, o diâmetro ou a circunferência.

Regra 1ª. *Multiplica-se o quadrado do raio por 3,1416.*
" 2ª. *Multiplica-se o quadrado do diâmetro por 0,7854.*
" 3ª. *Multiplica-se a metade do diâmetro pela metade da circunferência.*

Apliquemos agora estas três regras ao mesmo problema para ver se dão resultados idênticos.

Problema. Qual é a área de um círculo que tem 5 metros de raio?

Solução. Conforme a primeira regra, temos de multiplicar o quadrado do raio, que é 5 × 5 = 25, por 3,1416. Efetuada a operação, temos 78,54m², isto é, 78 metros quadrados e 54 centésimos de um metro quadrado ou 54 decímetros quadrados.

Conforme a segunda regra, temos de multiplicar o quadrado do diâmetro, que é 10 × 10 =100 metros,

Regra 1.ª

```
   3,1416
       25
 --------
   157080
   62832
 --------
  78,5400
```

por 0,7854. Efetuada a multiplicação, temos também o produto 78,54m².

Conforme a **terceira regra**, temos de multiplicar a metade do diâmetro, que é 5, pela metade da circunferência, que é 15,708. Operando a multiplicação, achamos que o produto é igualmente 78,54m². Aquí temos de achar primeiro a circunferência, conforme ficou exposto no n.º **414**.

Regra 2.ª

0,7854 × 100 = 78,54

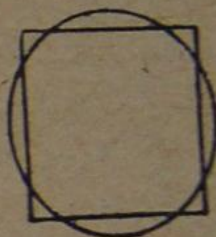
Regra 3.ª

```
 15,708
      5
 ------
 78.540
```

Resolver os seguintes problemas:

1. Qual é a área de um círculo cujo diâmetro mede 75 metros? Resp. 4417m²,8750.

2. Achar a área de um prado em que um cavalo pode pastar, estando preso a uma estaca por uma corda de 7m,50 de comprimento. Resp. 176m²,7150.

417. Sendo dado o diâmetro de um círculo, podemos achar o lado muito aproximado de um quadrado que tenha a mesma área, multiplicando o diâmetro por 0,8862. Assim, sendo o diâmetro de um circulo 9 centímetros, o lado de um quadrado equivalente a êsse círculo é 0,8862 × 9 × 7,9758, isto é, 7 centímetros e 9758 décimos milésimos.

Medição cúbica

418. Volume dos corpos é a medida do espaço que êles ocupam.

A medida cúbica tem por fim achar não só o tamanho ou volume dos corpos, mas também a capacidade dos recintos, salas, tulhas, armazens, vasos, etc.

Capacidade de uma sala, armazem, tulha, etc., é o espaço compreendido dentro das suas faces, denominadas paredes ou lados, assoalhos e teto.

419. Cubo é um corpo limitado por seis faces quadradas e iguais. O lado dêsses quadrados é a *aresta* do cubo.

420. A unidade escolhida para medir os volumes é o metro cúbico que, já vimos, tem um metro de aresta. Os volumes menores do que o metro cúbico são avaliados em decimetros cúbicos, centímetros cúbicos ou milímetros cúbicos.

421. Os solidos geométricos mais simples, depois do cubo, são os limitados por seis paralelogramos — chamam-se *paralelepipedos*. Dêstes os mais comumente encontrados são limi-

tados por retângulos. Cada retângulo é uma *face* do paralelepipedo e as intersecções das faces são as arestas. Tais paralelepípedos se domominam, por isso, *paralelepipedos retângulos* ou *blocos retangulares*.

As salas, os tijolos, caixas, caixotes, caixas d'agua, etc., tem, em geral, a forma de paralelepipedos retângulos. Basta examinar uma caixa de fósforos para verificar que as faces do bloco retangular são iguais duas a duas e que só há nele, por conseguinte, 3 arestas diferentes. Estas arestas dão as *dimensões* do paralelepipedo: comprimento, largura e altura.

Volume do bloco retangular

422. Vejamos como se pode calcular o volume do bloco retangular, conhecidas as suas dimensões.

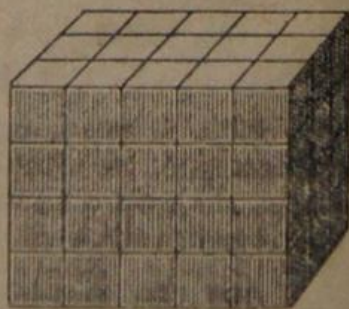
Problema. Qual é o volume de um paralelepipedo que mede 5 polegadas de comprimento, 3 de largura, e 4 de altura.

Solução. Observando a primeira figura vemos que ela representa um sólido que, na face de baixo como na de cima, mede 5 polegadas de comprimento e 3 de largura, e por isso tem a superfície de $5 \times 3 = 15$ polegadas quadradas (n.° 404). Sôbre cada polegada quadrada podemos assentar uma polegada cúbica; de modo que, si o bloco retangular tivesse sòmente 1 polegada de altura, o seu volume seria $15 \times 1 = 15$ polegadas cúbicas; se tivesse 2 polegadas de altura, o seu volume seria $15 \times 2 = 30$ polegadas cúbicas; mas, como tem 4 polegadas de altura, o seu volume é $15 \times 4 = 60$ polegadas cúbicas.

Regra. *Para se achar o volume de um paralelepipedo retângulo faz-se o produto de suas três dimensões (comprimento, largura e altura.)*

423. Quando as dimensões do paralelepipedo são iguais a figura se transforma num cubo. Nesse caso para obter o volume basta calcular o cubo da aresta.

Exemplo: o volume de um cubo com 7m. de aresta é $7 \times 7 \times 7 = 7^3 = 343$ metros cúbicos. Si a aresta fôr 3cm, o volume 3^3 ou 27 cm^3; e assim por diante.

Regra: *O volume de um cubo é igual ao cubo de sua aresta.*

Nota. Se um corpo é irregular e não tem todas as faces retangulares, então, para acharmos o seu volume, precisamos de certos conhecimentos e regras que só podemos aprender na Geometria.

1. Qual é o volume de um caixão que tem 4 metros de comprimento, 3 de largura e 2 de altura? Resp. $24m^3$.

2. Qual é o volume de um muro que tem 20 metros de comprimento, 1m, 50 de largura e 4 de altura? Resp. $120m^3$.

3. Um túnel de uma estrada de ferro mede 60 metros de comprido, 5 de largo e 9 de alto; quantos metros cúbicos de terra se tiraram dalí? Resp. $2700m^3$.

4. Quantos litros de água contém uma caixa que mede 15 decímetros de comprimento, 8 de largura e 10 de altura; sabendo-se que o litro de água ocupa o espaço de um decímetro cúbico? Resp. 1200 litros.

5. Quantos fardos, tendo cada um 2 metros de comprimento, 1 de largura e 1 de altura, poderá acomodar um armazem que tem 20 metros de comprimento, 10 de largura e 9 de altura? Resp. 900 fardos.

6. Qual é a capacidade de uma sala que mede 9m,5 de comprimento, 7m,4 de largura e 6m,8 de altura? Resp. ?

Achar a capacidade de um cilindro

Cilindro

424. Cilindro é um corpo redondo limitado por dois círculos iguais chamados **bases**, e por uma superficie curva chamada **superficie cilíndrica.**

A altura do cilindro é a distância entre as duas bases. As medidas e vasos cilindricos teem uma das bases fechadas que se chama fundo, e a outra aberta que se chama abertura ou bôca. Diâmetro do cilindro é a largura da bôca ou abertura.

Regra. *Para se achar o volume de um cilindro, acha-se a área de uma das bases e multiplica-se pela altura.*

Qual é o volume de um cilindro de 4cm. de diâmetro e 20 de altura? Resp. 215,328 cm^3.

Achar o volume de uma pirâmide e de um cone

425. Pirâmide é um sólido limitado por um poligono qualquer (base da pirâmide) e por tantos triângulos quantos são os lados da base. Esses triângulos têm um vértice comum que é o vértice da pirâmide.

Cone é um sólido limitado por um circulo, que é a *base* do cone, e por uma superficie curva chamado superficie cônica.

Cone

Ilustração. Prova-se em Geometria que o volume de uma pirâmide é exatamente um terço do produto da área da base pela altura; e que o volume de um cone é um terço do volume de um cylndro que tem a mesma base e a mesma altura.

Se tomarmos um cilindro de ferro massiço de qualquer dimensão e o levarmos ao torno, para o transformar em um cone, o ferro desbastado pelo torno terá o dôbro do pêso do ferro que restou no cone, isto é, se o ferro desbastado pesar dois quilos, o cone pesará um quilo; por isso o volume de um cone é um terço do produto da área da base pela altura.

Regra. *Para se achar o volume de uma pirâmide ou de um cone, multiplica-se a área da base pela altura e divide-se por 3.*

Qual é o volume de um cone que mede 18 metros de diâmetro em sua base, e 21 de altura? Resp. 1781,287m³.

Achar a superfície e volume de uma esfera

Esfera

426. Esfera ou **Globo** é um sólido limitado por uma superfície curva a qual tem todos os seus pontos igualmente distantes de um ponto interior chamado *centro*.

Diâmetro da esfera é uma reta que passa pelo centro e termina na superfície.

Raio da espera é a reta traçada do centro a qualquer ponto da superfície.

Regra. *Para se achar a superfície de um esfera, multiplica-se a sua circunferência pelo diâmetro.*

Para se achar o volume de uma esfera, multiplica-se o cubo do seu diâmetro por 0,5236.

1. Qual é a superfície de uma esfera cujo diâmetro é 24 centímetros? Resp. 1809,5616cm².

2. Qual é o volume de uma esfera cujo diâmetro tem 12 centimetros? Resp. 904,780cm³.

Vasilhas de formas diferentes

427. Vemos aqui três figuras, a primeira tem a forma cônica; a segunda tem a forma esférica, e a terceira, a forma cilíndrica. Tendo estas figuras a mesma altura e a mesma base, segue-se que, se a capacidade cônica fôr um litro a da esférica será dois litros, e a da cilíndrica será três.

PESO ESPECIFICO E PESO RELATIVO

428. A experiência diariamente nos mostra que as diferentes substâncias, tendo volume igual, teem pesos muito diferentes.

Todos sabem que uma cunha de ferro pesa muito mais do que uma cunha de madeira que tenha as mesmas dimensões. Ninguém ignora que uma bola de bilhar pesa muito menos do que uma bola de chumbo do mesmo tamanho, porque o marfim é mais leve do que o chumbo.

429. Para comparar entre si as diversas substâncias debaixo do ponto de vista do seu pêso, em volume igual, adotou-se como unidade de comparação o pêso da água distilada na temperatura de 4 graus centigrados, e deu-se o nome de **pêso específico** ou **densidade** à relação do peso de um corpo para o pêso que tem a água distilada em igual volume.

Ilustração. Um centímetro cúbico de água distilada pesa 1 grama e 1 centímetro cúbico de zinco batido pesa 7 gramas: aqui vemos que, em igual volume de um centímetro cúbico, o zinco pesa 7 vezes mais do que a água distilada, e por isso o seu peso específico é 7, porque o peso da água é tomado como unidade. Um centímetro cúbico de platina pesa aproximadamente 23 gramas, isto é, 23 vezes mais do que pesa um centímetro cúbico de água, por isso o seu peso específico é aproximadamente 23.

430. Tabela do pêso específico de alguns sólidos e líquidos.

SÓLIDOS

Platina	22,06	Diamante	3,52
Ouro	19,25	Mármore branco	2,83
Chumbo	11,35	Cristal de rocha	2,65
Prata	10,47	Vidro	2,49
Cobre	8,85	Enxofre	2,08
Níquel	8,27	Marfim	1,92
Ferro	7,78	Açúcar	1,60
Estanho	7,29	Ébano	1,33
Zinco	7,19	Gêlo	0,93
		Pinho branco	0,49
		Cortiça	0,24

LIQUIDOS

Mercúrio (azougue ..	13,60
Acido sulfúrico	1,84
Mel de Abelhas	1,45
Leite	1,03
Agua do mar	1,02
Agua distilada	**1**
Vinho	0,99
Azeite de oliveira .. .	0,91
Alcool absoluto	0,71
Eter sulfúrico	0,73

Achar o pêso específico de um sólido, sabendo o seu volume e o seu pêso relativo

431. Chama-se *pêso relativo* de um corpo aquele que se obtém na balança e é avaliado em gramas ou quilogramas

432. Sabendo-se o pêso relativo de um sólido, e o seu volume em centimetros cúbicos, podemos fàcilmente achar o seu pêso específico.

Nota. Podemos também achar o pêso específico dos corpos por meio da balança hidrostática ou do aerômetro de Nicholson; mas estes dois processos pertencem ao estudo da Física.

Problema. Pesando um corpo 250 gramas e tendo o seu volume 50 centimetros cúbicos, qual é o seu pêso específico?

Solução. Se o corpo dado no problema tivesse o mesmo pêso específico da água, pesaria 50 gramas visto que cada centímetro cúbico de água distilada pesa uma grama. Mas o corpo pesa 250 gramas, e por isso o seu pêso específico deve ser tantas vezes maior que o da água, quantas vezes o número 50 está contido em 250. Dividindo 250 por 50, temos 5, que é o pêso específico do corpo.

$$250 \div 50 = 5$$

Regra. *Para se achar o pêso específico de um sólido, divide-se o seu pêso relativo, expresso em gramas, pelo seu volume, expresso em centimetros cúbicos.*

Nota. Quando o pêso relativo fôr muito grande, divide-se o número de quilogramas pelo número de decímetros cúbicos que tiver o corpo.

1. Se 85 centímetros cúbicos de zinco pesam 595 gramas; qual é o pêso específico do zinco? Resp. ?
2. Uma barra de ouro contendo 40 centimetros cúbicos pesa 770 gramas; qual é a densidade do ouro? Resp. ?
3. Uma peça de marfim pesa 48 gramas, e tem 25 centímetros cúbicos de volume; qual é o pêso específico do marfim? Resp. ?

Achar o volume de um sólido, sabendo o seu pêso relativo e o seu pêso específico

433. Sabendo o pêso relativo de um corpo sólido e também o seu pêso específico, podemos achar fàcilmente com exatidão o seu volume, seja qual fôr a forma que êle tiver.

Problema. Se um corpo pesa em uma balança 250 gramas, e a sua densidade é 5, qual é o volume exato dêsse corpo?

$$250 \div 5 = 50$$

Solução. Se o corpo dado no problema tivesse a densidade da água distilada, teria 250 centímetros cúbicos, porque cada centímetro cúbico da água pesa 1 grama. Mas, como o corpo é 5 vezes mais pesado do que a água, terá a quinta parte do seu volume. Por isso, dividindo 250 por 5, temos 50, que é o número de centímetros cúbicos que tem o corpo.

Regra. *Para se achar o volume de um sólido, divide-se o seu pêso relativo expresso em gramas pelo seu pêso específico, e o quociente será o seu volume expresso em centímetros cúbicos.*

1. Um vaso de ouro pesa 924 gramas; sendo o pêso específico do ouro 19,25, quantos centímetros cúbicos deve ter êste vaso? Resp. 48.

2. Pesando a chave de um portão 389 gramas, e sendo a densidade do ferro 7,78, quantos centímetros cúbicos deve ter esta chave? Resp. 50.

3. Quantos centímetros cúbicos deve ter uma lasca de cristal de rocha, que pesa 198,75 g., sabendo-se que o peso específico da pedra é 2,65? Resp. 75.

Achar o pêso relativo de um sólido, sabendo o seu volume e o seu pêso específico

434. Sabendo o volume de um corpo qualquer, e sabendo também o seu pêso específico, podemos saber fàcilmente o peso que êle terá em uma balança.

Problema. Qual é o pêso relativo de um corpo que tem 25 centímetros cúbicos, e cuja densidade é 4?

$$\begin{array}{r} 25 \\ 4 \\ \hline 100 \end{array}$$

Solução. Se a densidade dêste corpo fosse 1, como a da água distilada, então os 25 centímetros cúbicos pesariam 25 gramas; mas como a densidade é 4, o seu peso relativo será 4 vezes 25 gramas, que são 100 gramas.

Regra. *Para se achar, expresso em gramas, o pêso relativo de um corpo, multiplica-se o seu volume, expresso em centímetros cúbicos, pelo seu pêso específico.*

1. Quanto pesarão 15 centímetros cúbicos de platina?
Resp. 330,9 g.

2. Quanto pesarão 400 centímetros cúbicos de madeira de pinho?
Resp. 196 gramas.

3. Quanto deve pesar um litro de leite puro?
Resp. 1 quilo e 30 gramas.

REVISTA GERAL

Problemas para o exame

Nota. O examinando resolverá qualquer dos seguintes problemas, dando a regra ou a solução analítica.

1. A soma de dois números é 990, e a sua diferença é 90; quais são os números? Resp. ?

2. Quantos quilogramas de milho, custando Cr$ 0,50 cada kg. se podem dar por 15 metros de linho, de Cr$ 2,00 cada metro? Resp. 60 kg.

3. Que número multiplicado por $1\frac{3}{8}$ dará $14\frac{3}{4}$?
Resp. $10\frac{8}{11}$.

4. Se 20 homens podem construir uma ponte em 60 dias, quantos homens a poderão construir em 50 dias? Resp. 24.

5. A terça parte de uma brigada morreu na batalha, a quarta parte desertou, e 1000 soldados ficaram prisioneiros; qual era o total da brigada? Resp. 2400.

6. A diferença entre $\frac{7}{8}$ e $\frac{4}{5}$ de certo número é 6; qual é o número?
Resp. 80.

7. Juntando-se a um número $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ dêsse mesmo número, êle ficará 84; qual é o número? Resp. 48.

8. Achar a incógnita da seguinte proporção $\frac{5}{7} : \frac{3}{4} :: x : 42$.
Resp. 40.

9. *A* pode fazer uma parede em 4 dias, e *B* pode faze-la em 3 dias; em quantos dias a poderão fazer ambos? Resp. $1\frac{5}{7}$ d.

10. Achar o valor de $\frac{31}{25} \times \frac{8\frac{1}{2}}{10\frac{1}{5}}$. Resp. $1\frac{1}{30}$

11. Qual é a área de um triângulo que tem 12 metros de base e 15 metros de altura?
Resp. 90 m^2.

12. Qual é o custo de um artigo que, sendo vendido por Cr$ 64,80 deu 20 % de lucro ? Resp. Cr$ 54,00.

13. Três negociantes formaram uma sociedade; *A* entrou com $\frac{2}{5}$ do capital; *B* com $\frac{3}{8}$, e *C* com o resto; ganhando êles Cr$ 1250,00, qual é a parte de *C* ? Resp. Cr$ 281,25.

14. *A* e *B* fizeram uma sociedade: *A* entrou com Cr$ 1200,00 a 1 de Janeiro, e *B* entrou em 1 de Abril com certa quantia que, no fim do ano, lhe deu metade dos lucros; qual é a quantia ? Resp. Cr$ 1600,00.

15. Tradução de um problema grego: "O' glória de Helicon, Pitágoras, querido das musas! dize-me quantos discípulos frequentaram a tua escola; quantos, perto de ti, escutam ansiosos a palavra do mestre falando da sabedoria. — Polícrato, grava no teu espírito o que te vou dizer: A metade dos discípulos estuda matemáticas, ciência da luz e da verdade; a quarta parte trabalha para descobrir as leis imortais que regem a natureza; a sétima parte reflete sobre tudo o que ouve, e assiste em silêncio; há ainda três mulheres." Quantos discípulos tinha Pitágoras? Resp. 28.

16. Em um pomar $\frac{1}{2}$ das árvores são laranjeiras; $\frac{1}{6}$ são ameixeiras, e o resto são 80 pessegueiros e jaboticabeiras; quantas árvores tem o pomar? Resp. 240.

17. Uma lebre corre 36 metros por minuto, e leva 80 metros de dianteira a um perdigueiro que a persegue, e que corre 40 metros por minuto; que distância tem de andar o cão para a alcançar? Resp. 800 metros.

18. Um boticário tinha alcool de 30 graus, e precisava que êle ficasse reduzido a 28; que parte de água lhe devia adicionar para ficar nesta graduação? Resp. 14 partes de alcool.
1 parte de água.

19. Em uma distilação de garapa, o primeiro barril de aguardente que saiu do alambique, tinha 30 graus; o segundo 26; o terceiro 22, e o quarto 18. Sendo toda esta aguardente reunida em uma pipa, com quantos graus ficou ela? Resp. 24.

20. A cidade de Jerusalém está situada a 78° e 45' ao oriente do Rio de Janeiro; quando é meio dia no Rio de Janeiro, que horas são em Jerusalém? Resp. 5 horas e 15 minutos da tarde.

21. Dois homens partiram do mesmo lugar e seguiram pela mesma estrada. *A* andava 8 quilômetros por hora, e *B*, 10 quilômetros; *A* saindo 5 horas antes de *B*, em que tempo *B* o alcançaria? Resp. 20 horas.

22. Um tanque tinha duas torneiras; uma o enchia em 3 horas, e a outra em 5; colocaram, porém, mais uma torneira que, junta com as outras duas, enchia o tanque em uma hora; em que tempo o encheria a nova torneira? Resp. $2 \frac{1}{7}$ horas.

23. Decompor o número 330 em seus fatores primos.
Resp. $2 \times 3 \times 5 \times 11$.

24. Um homem vendeu um objeto por Cr$ 75,00 que eram só $\frac{5}{8}$ do custo; quanto perdeu no objeto ? Resp. Cr$ 45,00.

25. Achar o mínimo múltiplo comum de 9, 3, 12 e 15.
Resp. 180.

26. Achar a diferença entre a raiz cúbica de 941192 e a raiz quadrada de 45369. Resp. 115.

27. Multiplicar 0,0082 por 7,05 e dividir o produto por 0,0000705. Resp. 820.

28. Quanto resta de uma quantidade, da qual se tirou um terço, um quarto e um quinto ? Resp. $\frac{13}{60}$.

29. A que taxa se devem emprestar Cr$ 720,00, para renderem Cr$ 36,00 em uma ano ? Resp. 5 %.

30. Subtraindo-se 5 de certo número, dois terços do resto são iguais a 40. Qual é o número ? Resp. 65.

31. Quanto é em nossa moeda £ 560-12-6 ao câmbio 60,00 ?
Resp. Cr$ 33.637,50.

32. Reduzir Cr$ 765,00 a francos, ao câmbio de 0,50.
Resp. 1530 francos.

33. Quais são os juros de Cr$ 6000,00 em 3 anos, 7 meses e 15 dias, a 6 % ? Resp. Cr$ 1305,00.

34. Um indivíduo esqueceu-se do número da casa para onde ia, e só se lembrava de que a diferença, entre um terço e um quarto dêsse número era 10. Qual é o número ? Resp. ?

35. Se o logaritmo de 12 é 1,079181, qual é o logaritmo do quadrado de 12 ? Resp. Log. 2,158362.

36. Quantos meses são $\frac{21}{24}$ de um ano ?
Resp. 10 meses e meio.

37. Dois tropeiros *A* e *B* alugaram um pasto por Cr$ 35,00; *A* pôs ali 4 cavalos durante 2 semanas, e *B* teve lá 3 cavalos durante 4 semanas; quanto tem de pagar cada um ?
Resp. *B* Cr$ 14,00 e *A* Cr$ 21,00.

38. Demonstrar que 167 é um número primo. (Vede n.° **101**).

39. Um fazendeiro vendeu $\frac{3}{8}$ dos seus carneiros, e logo depois comprou certo número igual a $\frac{4}{9}$ dos que lhe restaram, e ficou então com 65 carneiros; quantos carneiros tinha êle antes da venda ? Resp. 72.

40. Quantos ares te mum terreno que mede 1800 metros de comprimento e 755 de largura ? Resp. ?

41. Achar o valor de $\frac{3{,}0005 \times 0{,}006}{0{,}0009}$. Resp. 20,003.

42. Quatro aldeias tinham que pagar o tributo de Cr$ 4350,00 na proporção dos seus habitantes; ora, tendo a primeira 250 habitantes; a segunda 300, a terceira 400, e a quarta 500, quanto tinha de pagar cada uma?
Resp. Cr$ 750,00; Cr$ 900,00; Cr$ 1200,00; Cr$ 1500,00.

43. Achar a superfície de um círculo que tem 4 metros de diâmetro. Resp. ?

44. Se dividirmos igualmente 3 barricas de farinha por 12 famílias, que fração de uma barrica receberá cada família ? Resp. ?

45. Dois terços de um número são 22; qual é êsse número ? Resp. ?

46. Dividir 36 em duas partes na razão de 7 e 2. Resp. 28 e 8.

47. A soma de três números é 54; o primeiro é o dôbro do segundo, e o terceiro, três vezes o segundo; quais são os números ? Resp. ?

48. Achar os cinco números consecutivos que somam 305. Resp. ?

49. Dois homens partiram do mesmo lugar; um viajou 52 quilômetros para o norte, e o outro 39 quilômetros para oeste; a que distância ficou um do outro? Resp. 65 km.

50. Quanto é em nossa moeda 584 dollars ao câmbio de Cr$ 19,80 ? Resp. ?

51. Quantos metros cúbicos de pedra tem um muro que tem 32m de comprimento, 2,5m de altura e 0,65m de grossura ? Resp. $52m^3$

52. Marcando o termômetro centígrado 35 graus, quantos graus deve marcar o Fahrenheit ? Resp. ?

53. Marcando o termômetro Fahrenheit 77 graus, quantos graus deve marcar o centígrado ? Resp. ?

54. Dividir $\frac{3}{5}$ de $6\frac{1}{4}$ por $\frac{2}{3}$ de $7\frac{1}{2}$. Resp. $\frac{3}{4}$.

55. Por que número se deve multiplicar $8\frac{13}{16}$ para que o produto seja 3 ? Resp. ?

56. Se 84 alqueires de milho sustentam 16 cavalos em 24 dias, quantos alqueires são necessários para sustentar 36 cavalos em 16 dias ? Resp. 126.

57. A independência do Brasil realizou-se a 7 de Setembro de 1822, e a proclamação da República, a 15 de Novembro de 1889, quanto tempo o Brasil foi Império ? Resp. 67 an. 2 m e 8 dias.

— FIM —

ÍNDICE

N.º 3.827 — Oficinas Gráficas da Livraria Francisco Alves